Formulações modais de propriedades lógicas

Joel Soares Moreira NUSP: 11225742

Um dos objetos de estudo principais da lógica desde Aristóteles é a análise de certas propriedades lógicas que uma fórmula (ou conjunto de fórmulas) pode ter. Existem várias propriedades desse tipo:

- uma fórmula é uma tautologia se ela não pode ser falsa
- uma fórmula é uma contradição se ela não pode ser verdadeira
- um conjunto de fórmulas é consistente se elas podem todas ser verdadeiras
- duas fórmulas são equivalentes se elas sempre possuem o mesmo valor de verdade

A formalização dessas propriedades pode ser feita de duas formas: a forma sintática, pela teoria de prova, e a forma semântica, pela teoria de modelos. Tomaremos como exemplo principal a noção de consistência.

Na teoria de prova, dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é **sintáticamente consistente** (em geral só "**consistente**") se, dentro de algum sistema de prova, não podemos derivar uma contradição (a fórmula $\bot$) tomando Γ como axiomas.

Nessa definição, dois pontos são de interesse.

Primeiro é o "sistema de prova". Para a lógica de primeira ordem, existem vários sistemas de prova que podemos usar: cálculo de sequentes, sistemas de Hilbert, dedução natural, etc. Assim, a definição pode acabar parecendo um pouco arbitrária, já que o sistema de prova escolhido é arbitrário.

Segundo são os objetos na ontologia da definição, os *truthmakers*[1] e *falsemakers* da afirmação que algum conjunto de fórmulas é consistente. Os objetos na ontologia de definições da teoria de prova são deduções (sequências finitas de fórmulas governadas por certas regras de inferência), e a nossa definição afirma a não-existência de um certo tipo de dedução. Assim, temos que objetos específicos (deduções a partir de Γ que levam a $\bot$) só podem ser *falsemakers* para a afirmação que Γ é consistente: para verificar que ela é *verdadeira*, é necessário percorrer todos os objetos no escopo (deduções a partir de Γ) e verificar a ausência de uma propriedade (presença de $\bot$ na dedução).

Na teoria de modelos, dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é **semânticamente consistente** (em geral "**satisfatível**") se elas possuem um modelo (i.e. existe um modelo onde todas são verdadeiras).

Aqui, novamente, é interessante olhar para a ontologia. Nesse caso, os objetos nela são modelos, e objetos específicos (modelos onde todas as fórmulas em Γ são verdadeiras) são *truthmakers* da afirmação que Γ é satisfatível. Para demonstrar que essa afirmação é *falsa*,

[1] Achei o termo "*truthmaker*" como "o objeto que torna uma afirmação verdadeira" bem útil. Estou usando ele nesse texto com esse sentido geral, e não com o sentido formal apresentado nas aulas.

precisariamos percorrer todos os objetos no escopo (modelos na linguagem das fórmulas de Γ) e verificar a ausência de uma propriedade (todas as fórmulas de Γ são verdadeiras naquele modelo).

Importando a nomenclatura feita por Nicholas J. J. Smith [2, p. 95], podemos chamar propriedades como a satisfatibilidade de S-propriedades, pois algum ("some") objeto é suficiente para validá-las, enquanto propriedades como a consistência são A-propriedades, pois todos ("all") os objetos no escopo são necessários para validá-las. Como fica claro pela nossa definição em termos de *truthmakers* e *falsemakers*, toda S-propriedade tem uma A-propriedade associada (sua negação) e vice-versa.

Assim, as duas noções de consistência que definimos são opostas: semânticamente ela é uma S-propriedade, enquanto sintáticamente ela é uma A-propriedade. Essas duas definições são unidas pelas propriedades de solidez[2] e completude da lógica de primeira ordem, especificamente dos seus sistemas de prova.

Seja ϕ uma fórmula e Γ um conjunto de fórmulas. Podemos dizer que Γ **acarreta em** ϕ de duas formas:

- **Sintáticamente**: $\Gamma \vdash \phi$ significa que, em algum sistema de prova, existe uma prova de ϕ tomando Γ como axiomas.
- **Semânticamente**: $\Gamma \vDash \phi$ significa que em todo modelo onde Γ é verdade, ϕ também é verdade.

Assim, definimos solidez e completude como:

- **Solidez**: Se $\Gamma \vdash \phi$, então $\Gamma \vDash \phi$.
- **Completude (Gödel)**: Se $\Gamma \vDash \phi$, então $\Gamma \vdash \phi$.

Podemos redefinir esses conceitos em termos de consistência[3]:

- **Solidez**: Se Γ é satisfatível, então Γ é consistente.
- **Completude**: Se Γ é consistente, então Γ é satisfatível.

Assim, para a lógica de primeira ordem, as duas noções de consistência são equivalentes, permitindo que sempre possamos tratar consistência[4] como uma S-propriedade[5]. Isso também afasta os medos associados à escolha do sistema de prova: desde que o sistema escolhido seja sólido e completo, todos eles são iguais na medida que são equivalentes à definição semântica.

Contudo, a definição modelo-teorética ainda não é perfeita. No seu artigo "Metalogic and Modality", Hartry Field descreve o que ele acha o problema mais grave[1]:

Tomemos Γ como o conjunto de todas as verdades sobre a teoria de conjuntos. Já que o domínio de um modelo é um conjunto e V, o conjunto de todos os conjuntos, não é um

[2] *soundness* em inglês

[3] Basta tomar $\phi = \perp$ e considerar os contrapositivos.

[4] e outras propriedades derivadas dela, como inconsistência, tautologia etc.

[5] Esse fato é usado regularmente na matemática normal: sempre que tratamos a existência de um contraexemplo para algum teorema como uma prova da negação daquele teorema, estamos atacando o problema pela via modelo-teorética.

conjunto, então qualquer modelo que sirva como *truthmaker* da afirmação que Γ é satisfatível não pode conter todo o universo da teoria de conjuntos, e de fato não precisa se assemelhar à teoria de conjuntos tradicional[6]. Mais grave ainda, a existência desse modelo só é garantida por teoremas que dependem da completude da lógica de primeira ordem: se sairmos dessa lógica, é possível que consistência semântica seja completamente incapaz de capturar a nossa noção intuitiva de consistência.

A alternativa proposta por Field, que foi baseada no trabalho de Georg Kreisel, é tomar consistência na metalógica como uma noção primitiva, não redutível a menores partes. Isso torna natural a inclusão de operadores modais na metalógica: a noção "$\Diamond A$" torna-se definível como "A é consistente", e "$\Box A$" como "$\neg A$ é inconsistente".

Ele faz isso postulando dois princípios modais separados que intuitivamente deveriam ser seguidos pela consistência. Se Γ é um conjunto de fórmulas, então:

- (*Model-theoretic possibility principle*) Se existe um modelo que satisfaz Γ, então Γ é consistente.

Assim, a nossa consistência semântica é condição *suficiente* para consistência: podemos dizer, por exemplo, que alguma axiomatização Γ da teoria de conjuntos é consistente sem depender de algum modelo que contenha o universo da teoria de conjuntos.

Por outro lado, temos:

- (*Modal soundness*) Se Γ é consistente, então não existe nenhuma prova de $\perp$ tomando Γ como axiomas.

A consistência sintática, então, é condição *necessária* para consistência. Em lógicas não completas, faz sentido que possamos dizer que algum conjunto de fórmulas é inconsistente sem poder apontar para uma dedução de contradição, visto que incompletude significa que nem todas as fórmulas verdadeiras possuem uma dedução.

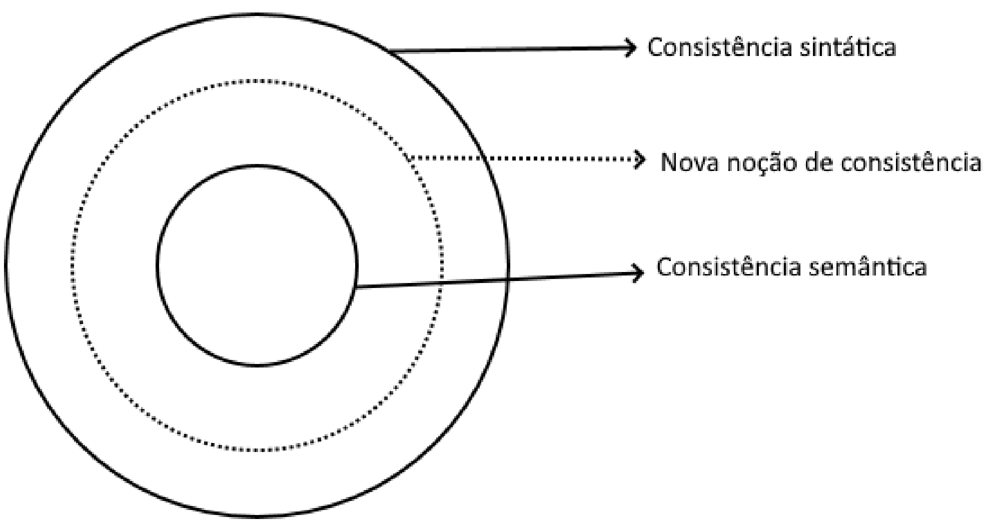

Figure 1: Baseado na imagem em Field[1, p. 6]

[6]Mais geralmente, para qualquer teoria cujo modelo esperado é infinito (além da teoria de conjuntos, também temos teorias como a aritmética de Peano), a existência de modelos não-isomorfos ao modelo esperado é garantida pelos teoremas de Löwenheim–Skolem.

Com isso, as consistências semântica e sintática se tornam sub- e superconjunto da nossa nova consistência, respectivamente, como mostrado na Figura 1.

O efeito do teorema da completude nessa nova definição é de comprimir todos esses conjuntos em um só: se consistência sintática implica em consistência semântica, então toda fórmula sintáticamente consistente é semânticamente consistente, e os limites superiores e inferiores da nova consistência são iguais. Assim, podemos tratar a noção de consistência na lógica de primeira-ordem da mesma forma que trataríamos antes.

A vantagem principal dessa definição primitiva é que ela não está submetida nem à semântica nem à sintaxe: ambas são necessárias para construir a ideia de consistência. Isso previne que tenhamos que escolher entre as duas definições em situações onde não queremos assumir completude[7].

Um ponto final de nota é que essa definição torna a consistência nem uma S nem uma A-propriedade: ela não depende da existência de nada. De fato, as definições ontológicas anteriores são substituidas por uma definição modal primitiva.

Na conclusão do artigo, Field tenta justificar essa substituição, presumívelmente devido a ceticismo causado por outras tentativas mal-sucedidas de subsituir ontologia por modalidade. Contudo, sem ter esse contexto, eu achei a primeira parte convincente: ele não parte afirmando a necessidade de remover ontologia da metalógica, mas sim apontando problemas razoáveis com as duas ontologias (sintática e semântica) que são razoáveis de tomar. Já que tomar uma ontologia mista (onde consistência é definida em termos de deduções e modelos ao mesmo tempo) não resolveria os problemas, faz sentido que a solução final deixe ontologia de lado.

References

[1] Hartry Field. Metalogic and modality. *Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition*, 62(1):1–22, 1991.

[2] Nicholas J J Smith. *Logic: The Laws of Truth.* Princeton University Press, Princeton, NJ, April 2012.

[7] A escolha mais popular, e que é contra a qual Field argumenta mais no texto, é a definição modelo-teorética, popularizada por Tarski. Escolher ela como a definição canônica de consistência leva aos problemas citados anteriormente, ao subordinar a metalógica à teoria de conjuntos.