UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PRG - CURSO DE CIÊNCIAS MOLECULARES

RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

CICLO AVANÇADO - 1º SEMESTRE / CCM-USP

CCM0428 - INICIAÇÃO À PESQUISA IV

TURMA 29

Provas de independência via forcing

Estudante Joel Soares Moreira NUSP: 11225742

joelsm@usp.br

Orientador Prof. Edélcio Gonçalves de Souza

FFLCH - Departamento de Filosofia

1 Introdução

Em 1900, o matemático David Hilbert publicou uma lista de 23 problemas não-resolvidos que ele considerava importantes para o desenvolvimento da matemática no século XX. Boa parte desses problemas foram respondidos com um sólido "sim"ou "não", mas a resposta para o primeiro deles não foi tão precisa. A solução para a Hipótese do Contínuo, iniciada por Gödel em 1940 e terminada por Cohen em 1963, é que ela é independente dos axiomas ZFC da teoria de conjuntos: mais precisamente, se os axiomas ZFC são consistentes, então ZFC é consistente tanto com a Hipótese do Contínuo quanto com a sua negação. Desde então, tanto a metodologia de modelos internos de Gödel quanto o *forcing* de Cohen fornecem uma nova maneira de atacar problemas, tanto na teoria de conjuntos pura quanto em outras áreas da matemática.

Além da sua utilidade na teoria de conjuntos, esses resultados ensinam uma lição mais ampla sobre os benefícios de métodos construtivos. Para provarmos que um conjunto Γ de fórmulas é consistente sintáticamente, é necessário provar um negativo: que, dentre todas as deduções que podemos fazer a partir de Γ, nenhuma leva a uma contradição. Contudo, para provar que esse mesmo Γ é consistente semânticamente, basta mostrar que Γ possui um modelo. Assim, métodos semânticos permitem que falemos algo sobre afirmações que não são dedutíveis a partir dos nossos axiomas, como o axioma da escolha ou o teorema da boa-ordem, ou afirmações que ainda não foram resolvidas pela comunidade matemática, como a conjectura de Goldbach ou dos primos gêmeos. Métodos computacionais, que verificam afirmações de forma “todo X tem propriedade P” percorrendo o domínio de X, e provas por (contra)exemplo, que verificam afirmações de forma “existe um X com propriedade P” apresentando um elemento do domínio de X com propriedade P, são exemplos de abordagens semânticas: elas não se preocupam com a teoria, mas sim com modelos dela.

Esse relatório busca resumir os tópicos estudados na minha IC, que buscava fazer uma introdução ao *forcing*. Além das razões acima, provas via *forcing* muitas vezes são difíceis de entender e, portanto, de revisar para fins acadêmicos: daremos enfoque especial nas limitações do *forcing* para criar intuição sobre os problemas que são resolvíveis por ele e os problemas que não são.

2 Semântica e sintaxe

2.1 Introdução

Para elucidar essas duas polaridades da matemática, pode ser útil considerar um exemplo.

Na álgebra abstrata, um **grupo** é um conjunto G e uma operação $\cdot$ que respeita os seguintes axiomas:

- A operação é fechada em G: $\forall a, b \in G(a \cdot b \in G)$
- A operação é associativa: $\forall a, b, c \in G((a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$
- Existe um elemento identidade: $\exists e \in G \forall a \in G(a \cdot e = e \cdot a = a)$
- Todo elemento tem um inverso: $\forall a \exists b(a \cdot b = b \cdot a = e)$

Boa parte da teoria de grupos consiste na manipulação desses axiomas, ou na inclusão de novos axiomas para criar definições mais específicas (um grupo finito tem G finito, um grupo abeliano tem comutatividade, etc). E as técnicas de manipulação que estão a dispor do matemático – toda a gama de técnicas de prova como contraposição, indução, etc – são extremamente fortes. De fato, elas são tão fortes que seria possível ensinar teoria de grupos só fazendo essas manipulações puramente sintáticas, sem nunca considerar os objetos de estudo da teoria: os grupos.

Contudo, é óbvio que grupos específicos são importantes. Em primeiro plano, a criação do formalismo algébrico foi motivada pelo estudo de grupos: de objetos matemáticos como os números inteiros, ou simetrias na geometria. Nenhum curso de teoria de grupos é puramente sintático, pois trazer exemplos conhecidos justifica definições e ilustra as consequências de teoremas em estruturas reais. Em segundo plano, resultados como teoremas de classificação são semânticos: eles nos dizem, por exemplo, "o conjunto de objetos que respeita os axiomas de grupo abeliano finito é dividido nessas categorias".

Essas duas polaridades - por um lado, fórmulas lógicas que descrevem certas propriedades e, pelo outro, os objetos matemáticos que satisfazem essas propriedades - são o que chamamos de "sintaxe"e "semântica", respectivamente. Nessa seção, estabeleceremos alguns resultados da teoria de modelos, que busca fazer uma ponte entre teorias (conjuntos de fórmulas lógicas) e modelos (objetos que satisfazem essas fórmulas).

2.2 Linguagens e fórmulas

Definição (Linguagem)**.** Uma **linguagem** $\mathcal{L}$ é um conjunto de símbolos. Esses símbolos são divididos em símbolos lógicos e símbolos não-lógicos. Os símbolos não-lógicos de $\mathcal{L}$ são chamados de sua **assinatura**.

A linguagem possui os símbolos a partir dos quais podemos escrever fórmulas. Esses símbolos são os símbolos que apareceriam em qualquer fórmula lógica de primeira ordem (conectivos como "$\neg$"e "$\vee$"; quantificadores como "$\forall$"; variáveis "x", "y", "v", "w"; a relação de igualdade "$=$"; e parentêses "(", ")"para pontuação) e a assinatura, os símbolos que carregam algum significado específico para aquela teoria. Esses símbolos são divididos em três categorias:

Definição (Assinatura)**.** A assinatura de uma linguagem $\mathcal{L}$ é dividida em três categorias:

- **Símbolos de constante**: símbolos como c que dão nome a objetos da teoria. Por exemplo, o símbolo "0"denotando o elemento neutro aditivo na aritmética.

- **Símbolos de relação**: símbolos como R que dão nome a relações n-árias entre objetos da teoria. Por exemplo o símbolo "$<$"em "$a < b$"denotando a relação de menor-que na aritmética, ou o símbolo "$\in$"em "$a \in b$"denotando a relação de pertencimento na teoria de conjuntos.

- **Símbolos de função**: símbolos como f que são nome a funções n-árias de objetos da teoria para um outro objeto da teoria. Por exemplo, o símbolo "$+$"em "$a + b$"denotando a função de adição na aritmética.

Tendo em mãos esses símbolos, podemos construir $\mathcal{L}$-fórmulas: fórmulas lógicas na linguagem $\mathcal{L}$. Contudo, antes precisamos definir $\mathcal{L}$-termos:

Definição ($\mathcal{L}$-termos)**.** O conjunto de termos de uma linguagem $\mathcal{L}$ é definido recursivamente:

- **Caso base**: Todo símbolo de constante c e variável x é um $\mathcal{L}$-termo.

- **Passo recursivo**: Se f é um símbolo de função n-ário e t_1, ... t_n são $\mathcal{L}$-termos, então $f(t_1, \dots t_n)$ é um $\mathcal{L}$-termo.

Intuitivamente, termos denotam objetos da teoria. Eles não são verdadeiros ou falsos: para obter fórmulas que podem possuir um valor de verdade, precisamos dizer algo específico sobre relações entre esses termos. Para isso, construímos $\mathcal{L}$-fórmulas:

Definição ($\mathcal{L}$-fórmulas)**.** O conjunto de fórmulas bem-formadas de uma linguagem $\mathcal{L}$ é definido recursivamente.

- **Caso base**: Se R é um símbolo de relação n-ário e t_1, ... t_n são $\mathcal{L}$-termos, então $R(t_1, \ldots\ t_n)$ é uma $\mathcal{L}$-fórmula. Se t_1, t_2 são $\mathcal{L}$-termos, então $t_1 = t_2$ também é uma $\mathcal{L}$-fórmula. Fórmulas desse tipo são chamadas de **fórmulas atômicas**.

- **Passo recursivo**: Se ϕ e ψ são $\mathcal{L}$-fórmulas, então também são:

  – $(\phi) \vee (\psi)$

  – $\neg(\phi)$

  – $\forall x(\phi)$

Caso seja desejável usar outros conectivos proposicionais como $\wedge$ ou $\rightarrow$, ou o quantificador existencial $\exists$, podemos definí-los a partir dos conectivos e quantificador que já temos. É útil para provas e definições minimizar a quantidade de conectivos lógicos na nossa linguagem. Para deixar a notação mais sucinta, também omitiremos parênteses em situações onde a ordem de operações é clara.

Essa definição permite que criemos uma hierarquia clara entre $\mathcal{L}$-fórmulas. Se ψ e ϕ são ambas $\mathcal{L}$-fórmulas, dizemos que ϕ é **subfórmula** de ψ se é possível construir ψ a partir de ϕ após zero ou mais aplicações do passo recursivo. Como exemplo, considere a seguinte fórmula:

$\psi =$ ”$\forall y((\neg(y \times y = 0)) \vee (y = 0))$”

Suas subfórmulas são:

- as fórmulas atômicas $\phi_1 =$ ”$y \times y = 0$” e $\phi_2 =$ ”$y = 0$”

- a fórmula $\phi_3 =$ ”$\neg(y \times y = 0)$”, obtida por aplicação do passo recursivo em ϕ_1

- a fórmula $\phi_4 =$ ”$(\neg(y \times y = 0)) \vee (y = 0)$”, obtida a partir de aplicação do passo recursivo em ϕ_2 e ϕ_3

- a própria $\psi =$ ”$\forall y((\neg(y \times y = 0)) \vee (y = 0))$”, obtida a partir de aplicação do passo recursivo em ϕ_4

Temos, então, $\mathcal{L}$-fórmulas. Mas essas fórmulas ainda não são passíveis de valores de verdade. O problema agora são as variáveis: uma fórmula da aritmética como $x < y$ é bem-formada, mas só podemos dizer se ela é verdadeira ou falsa se nos for dito exatamente quem é x e quem é y. Para resolver isso de forma puramente sintática, definimos $\mathcal{L}$-sentenças:

Definição ($\mathcal{L}$-sentenças)**.** Uma **$\mathcal{L}$-sentença** é uma $\mathcal{L}$-fórmula sem **variáveis livres**. Dizemos que uma variável x está livre se ela aparece num $\mathcal{L}$-termo que não está contido numa fórmula ou subfórmula de formato $\forall x(\psi)$, isto é, se a variável não está no escopo de um quantificador.

Por clareza, se v_1, ... v_n são variáveis, denotamos por $\psi(v_1, \ldots v_n)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula ψ onde nenhuma variável além de v_1, ... v_n ocorre livre. Note que isso não significa que todas essas variáveis estão livres, só que elas podem estar.

2.3 Interpretações

Com a noção de $\mathcal{L}$-sentença, chegamos em expressões da nossa linguagem que são passíveis de receberem valores verdade. A fórmula $\exists x \exists y \neg(x = y)$, por exemplo, é verdadeira quando existem dois objetos diferentes. Contudo, ela é falsa quando só existe um objeto. Como podemos dar valores verdade para uma sentença? Para fazer isso, precisamos fazer uma ponte entre a sintaxe com a qual viemos lidando e a semãntica.

A intuição é que introduziremos a noção de uma estrutura de uma linguagem: um universo matemático que possui dentro de si os elementos, relações e funções pras quais a linguagem dá nome. Podemos então interpretar os nomes da linguagem como sendo esses objetos no universo matemático, e verificar se alguma sentença é verdadeira avaliando o nosso universo matemático.

Definição (Estrutura)**.** Uma estrutura $\mathcal{M}$ numa linguagem $\mathcal{L}$ consiste em:

- um conjunto de elementos M que chamamos de **domínio**
- para todo símbolo de constante c, uma interpretação $c^{\mathcal{M}}$, que é um elemento de M
- para todo símbolo de relação n-ário R, uma interpretação $R^{\mathcal{M}}$, que é uma relação definida pelas n-uplas em $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$
- para todo símbolo de função n-ário f, uma interpretação $f^{\mathcal{M}}$, que é uma função $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$

Em essência, a estrutura possui internalizada os objetos reais que os símbolos da assinatura de $\mathcal{L}$ denotam.

Podemos agora tentar definir o que significa uma $\mathcal{L}$-sentença ser verdadeira numa estrutura. Contudo, veremos que só o que temos até agora não é suficiente.

Definição (Uma tentativa de definir verdade semântica)**.** Dizemos que um a sentença ψ é verdadeira na estrutura $\mathcal{M}$ (simbólicamente $\mathcal{M} \models \psi$) através da seguinte definição recursiva:

- Se ψ é atômica de forma $t_1 = t_2$, então $\mathcal{M} \models \psi$ se e só se $t_1^{\mathcal{M}}$ é o mesmo elemento que $t_2^{\mathcal{M}}$.
- Se ψ é atômica de forma $R(t_1 \ldots t_n)$, então $\mathcal{M} \models \psi$ se e só se $(t_1^{\mathcal{M}} \ldots t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$
- Se ψ é de forma $\phi_1 \vee \phi_2$, então $\mathcal{M} \models \psi$ se e só se $\mathcal{M} \models \phi_1$ ou $\mathcal{M} \models \phi_2$.
- Se ψ é de forma $\neg\phi$, então $\mathcal{M} \models \psi$ se e só se $\mathcal{M} \not\models \phi$.

Contudo, chegamos num problema com quantificação. O problema é simples: se ψ é de forma $\forall x\, \phi$ e usarmos a mesma abordagem, de condicionar a verdade de ψ na verdade da subfórmula ϕ, então teríamos que assumir que ϕ é uma sentença. Mas então ϕ não teria um x livre para o qual o nosso quantificador $\forall x$ aponta: só poderiamos verificar a verdade de sentenças como "$\forall x\, (1 = 1)$", onde a quantificação é vazia.

Existem algumas soluções para esse problema, que definem semânticas diferentes. Aqui, usaremos a semântica de Tarski, que é baseada em atribuições de variáveis. Em essência, a semântica de Tarski permite que fórmulas com variáveis livres $\phi(v_1 \ldots v_n) = \phi(\vec{v})$ recebam uma **atribuição de variável**, uma função $s : Var \to M$ (do conjunto de variáveis da linguagem Var ao domínio M).

Com isso, podemos escrever a nossa semãntica completa:

Definição (Interpretações de $\mathcal{L}$-termos)**.** Definimos a interpretação para qualquer $\mathcal{L}$-termo recursivamente.

- Se t é um símbolo de constante c, $t^{\mathcal{M}}$ é $c^{\mathcal{M}}$.
- Se t é um símbolo de variável v, s é uma atribução de variável e m é $s(v)$, $t^{\mathcal{M}}$ é m.
- Se t é de forma $f(t_1 \ldots t_n)$ para um símbolo de função n-ário f, $t^{\mathcal{M}}$ é $f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}} \ldots t_n^{\mathcal{M}})$.

Definição (Satisfatibilidade)**.** Dizemos que uma estrutura (ou, nesse contexto, um **modelo**) $\mathcal{M}$ e uma atribuição de variáveis s **satisfaz** ou **modela** uma **fórmula** $\psi(\vec{y})$ nos seguintes casos:

- Se $\psi(\vec{y})$ é atômica de forma $t_1 = t_2$, então $\mathcal{M}, s \models \psi(\vec{y})$ se e só se $t_1^{\mathcal{M}}$ é o mesmo elemento de M que $t_2^{\mathcal{M}}$.
- Se $\psi(\vec{y})$ é atômica de forma $R(t_1 \ldots t_n)$, então $\mathcal{M}, s \models \psi(\vec{y})$ se e só se $(t_1^{\mathcal{M}} \ldots t_n^{\mathcal{M}}) \in R^{\mathcal{M}}$
- Se $\psi(\vec{y})$ é de forma $\phi_1(\vec{y}) \vee \phi_2(\vec{y})$, então $\mathcal{M}, s \models \psi(\vec{y})$ se e só se $\mathcal{M}, s \models \phi_1(\vec{y})$ ou $\mathcal{M}, s \models \phi_2(\vec{y})$.
- Se $\psi(\vec{y})$ é de forma $\neg\phi(\vec{y})$, então $\mathcal{M}, s \models \psi(\vec{y})$ se e só se $\mathcal{M}, s \not\models \phi(\vec{y})$.

- **Se $\psi(\vec{y})$ é de forma $\forall x \phi(x, \vec{y})$, então $\mathcal{M}, s \models \psi(\vec{y})$ se e só se $\mathcal{M}, r \models \phi(x, \vec{y})$, para toda atribuição de variáveis r que concorda com s em todas as variáveis menos x.**

Uma notação comum só substitui as variáveis na fórmula aberta por elementos do domínio: ao invés de $\mathcal{M}, s \models \phi(\vec{y})$, podemos escrever $\mathcal{M} \models \phi[\vec{m}]$, onde $\vec{m}$ é a imagem de $\vec{y}$ sobre s. Por exemplo,

"Se $\psi(\vec{y})$ é de forma $\forall x \phi(x, \vec{y})$, então $\mathcal{M} \models \psi[\vec{m}]$ se e só se $\mathcal{M} \models \phi[n, \vec{m}]$, para todo $n \in M$."

Por fim, podemos definir consequência, uma noção lógica fundamental:

Definição (Consequência semântica)**.** Dizemos que a sentença ϕ é **consequência semântica** de um conjunto de sentenças Γ, simbólicamente (com algum abuso de notação) $\Gamma \models \phi$, se, para todo modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$, temos que $\mathcal{M} \models \phi$.

2.4 Completude

Embora tenhamos descrito a nossa semântica extensivamente, não iremos adentrar a fundo em nenhum sistema dedutivo específico. Seguindo Marker (1), definimos nosso sistema dedutivo assim:

Definição (Consequência sintática)**.** Uma dedução de ϕ a partir de Γ é uma sequência de sentenças $\psi_1, ..., \psi_n$ tal que $\psi_n = \phi$ e, para todo ψ_i, ou $\psi_i \in \Gamma$ ou é possível obter ψ_i a partir de $\psi_1, ..., \psi_{i-1}$ por meio de alguma das regras de inferência lógica.

Se essa dedução existe, então dizemos que ϕ é uma consequência sintática de Γ e escrevemos $\Gamma \vdash \phi$.

O ponto que precisaria ser aprofundado num texto de teoria de prova são as "regras de inferência lógicas": quais os movimentos que são permitidos para ir de uma sentença à outra, ou quais os axiomas lógicos que podemos inferir a partir de nada. Por ora, só precisamos saber as seguintes coisas sobre deduções:

- Deduções são finitas.
- É possível construír um sistema dedutivo que é **sólido**: se $\Gamma \vdash \phi$, então $\Gamma \models \phi$.

O converso da solidez, completude, é um resultado famoso de Gödel para a lógica de primeira ordem, que não demonstraremos aqui:

Teorema (Teorema da Completude)**.** Se $\Gamma \models \phi$, então $\Gamma \vdash \phi$.

A partir de consequência, conseguimos definir várias propriedades lógicas comuns:

- Uma sentença ϕ é uma tautologia se $\emptyset \vdash \phi$.
- Um conjunto de sentenças Γ é consistente se $\Gamma \nvdash \bot$, onde $\bot$ é uma contradição lógica (e.g. $\psi \wedge \neg\psi$).

Uma vantagem da completude é que as duas definições de consequência quantificam de formas opostas: a semântica requer que algo valha para *todo* modelo, enquanto a sintática só requer que algo valha para *alguma* dedução. Assim, se desejamos demonstrar que algo é uma tautologia, podemos evitar raciocínio infinitário optando pelo caminho sintático (só precisamos apresentar uma dedução de ϕ a partir de $\emptyset$, não verificar que $\mathcal{M} \models \phi$ para todo $\mathcal{M}$). Contudo, o contrário também pode valer: no caso de consistência, evitamos o raciocínio infinitário optando pelo caminho semântico (basta apresentar algum modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$, enquanto sintaxe requer que toda dedução a partir de Γ não deduza $\bot$). É essa definição semântica de consistência, chamada de **satisfatibilidade** (Γ é satisfatível se existe um modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \models \Gamma$) que é usada nas "provas de consistência"do *forcing.*

2.5 Teoria de Modelos

Aqui seguem alguns resultados elementares da teoria de modelos, via Marker (1).

Um corolário trivial de completude é compacidade. Dizemos que um conjunto de sentenças Γ é **finitamente satisfatível** se qualquer subconjunto finito de Γ é satisfatível.

Teorema (Teorema da Compacidade)**.** Se Γ é finitamente satisfatível, então Γ é satisfatível.

Demonstração. Suponha que Γ é finitamente satisfatível mas Γ não é satisfatível. Então, por completude e usando a definição de consistência (sintática), existe alguma demonstração a partir de Γ que leva a uma contradição. Mas essa demonstração é finita, e portanto só usa um subconjunto finito Γ_0 de sentenças de Γ. Assim, essa mesma demonstração é uma demonstração de uma contradição a partir de Γ_0 finito, contradizendo a hipótese que todo subconjunto finito de Γ é satisfatível. $\square$

Esse resultado já permite que alguns modelos problemáticos sejam criados: por exemplo, é possível provar a existência de modelos que seguem os axiomas para corpos ordenados (e.g. os racionais ou os reais) mas que possuem infinitésimos, elementos infinitamente pequenos. Para a teoria de conjuntos, contudo, os teoremas mais preocupantes são outros. Para chegar neles, definiremos algumas relações entre estruturas:

Definição (Imersão de estruturas)**.** Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são $\mathcal{L}$-estruturas, $\Phi : M \to N$ é uma **$\mathcal{L}$-imersão** de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$ se ela é injetora e conserva a interpretação de constantes, funções e relações:

- $\Phi(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$, para todo símbolo de constante c
- $\Phi(f^{\mathcal{M}}(m_1, ..., m_n)) = f^{\mathcal{N}}(\Phi(m_1), ..., \Phi(m_n))$, para todo símbolo de função n-ário f e $m_i \in M$
- $(m_1, ..., m_n) \in R^{\mathcal{M}}$ se e só se $(\Phi(m_1), ..., \Phi(m_n)) \in R^{\mathcal{N}}$, para todo símbolo de relação n-ário R e $m_i \in M$

Uma $\mathcal{L}$-imersão bijetora é um **$\mathcal{L}$-isomorfismo de estruturas**. Se $M \subseteq N$ e a função inclusão de M em N é uma $\mathcal{L}$-imersão, então $\mathcal{M}$ é uma **subestrutura** de $\mathcal{N}$.

No caso de subestruturas, essencialmente só é necessário que o domínio M seja fechado sob as interpretações das funções em $\mathcal{N}$ (restritas a M) e que ele contenha as interpretações das constantes em $\mathcal{N}$.

Uma propriedade relacionada entre estruturas seria o que chamamos de **equivalência elementar**: dizemos que $\mathcal{M}$ é elementarmente equivalente a $\mathcal{N}$, ou $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, quando $\mathcal{M} \models \phi$ se e só se $\mathcal{N} \models \phi$, tal que ϕ é $\mathcal{L}$-sentença. Acontece que isomorfismo implica em equivalência elementar:

Teorema. Se $\Phi : M \to N$ é um ($\mathcal{L}$)-isomorfismo, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$

A prova desse teorema dá uma ideia de como a maioria das provas em teoria de modelos são feitas, via indução na complexidade de fórmulas.

Demonstração. Começamos fazendo indução nos termos. Seja t um termo e $s : Var \to M$ for uma atribuição de variáveis tal que $s(v_i) = m_i$.

- Se t for algum símbolo de constante c, $\Phi(t^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = \Phi(c^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = c^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})] = t^{\mathcal{N}}[\Phi[\vec{m}]]$.
- Se t for uma variável v_i, $\Phi(t^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = \Phi(v_i^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = \Phi(m_i) = v_i^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})] = t^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})]$
- Se t for de forma $f(\vec{r})$, $\Phi(t^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = \Phi(f^{\mathcal{M}}(\vec{r}^{\mathcal{M}}[\vec{m}])) = f^{\mathcal{N}}(\Phi(\vec{r}^{\mathcal{M}}[\vec{m}])) = f^{\mathcal{N}}(\vec{r}^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})]) = t^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})]$

Assim, por indução na complexidade de termos, temos que $\Phi(t^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = t^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})]$ para todo termo t.

Fazemos uma indução análoga na complexidade de fórmulas. Seja $\alpha(\vec{v})$ uma fórmula:

- Se $\alpha(\vec{v})$ é de forma $t_1 = t_2$, então

  $\mathcal{M} \models \alpha[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow t_1^{\mathcal{M}}[\vec{m}] = t_2^{\mathcal{N}}[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \Phi(t_1^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) = \Phi(t_2^{\mathcal{M}}[\vec{m}])$ (inverso vale pois Φ é injetora)

  $\leftrightarrow t_1^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})] = t_2^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})]$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha[\Phi(\vec{m})]$

- Se $\alpha(\vec{v})$ é de forma $R(\vec{t})$, então

  $\mathcal{M} \models \alpha[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \vec{t}^{\mathcal{M}}[\vec{m}] \in R^{\mathcal{M}}$

  $\leftrightarrow \Phi(\vec{t}^{\mathcal{M}}[\vec{m}]) \in R^{\mathcal{N}}$

  $\leftrightarrow \vec{t}^{\mathcal{N}}[\Phi(\vec{m})] \in R^{\mathcal{N}}$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha[\Phi(\vec{m})]$

Assim, as fórmulas atômicas estão resolvidas. Como passo indutivo, resolvemos os conectivos lógicos. Suponha por indução que, para as fórmulas de menor complexidade β, temos que $\mathcal{M} \models \beta[\vec{m}] \leftrightarrow \mathcal{N} \models \beta[\Phi(\vec{m})]$:

- Se α é de forma $\neg\beta$, então

  $\mathcal{M} \models \alpha[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \beta[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \not\models \beta[\Phi(\vec{m})]$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha[\Phi(\vec{m})]$

- Se α é de forma $\beta_1 \vee \beta_2$, então

  $\mathcal{M} \models \alpha[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \mathcal{M} \models \beta_1[\vec{m}]$ ou $\mathcal{M} \models \beta_2[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \beta_1[\Phi(\vec{m})]$ ou $\mathcal{N} \models \beta_2[\Phi(\vec{m})]$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha[\Phi(\vec{m})]$

- Se $\alpha(\vec{v})$ é de forma $\forall x \beta(\vec{v}, x)$, então

  $\mathcal{M} \models \alpha[\vec{m}]$

  $\leftrightarrow \mathcal{M} \models \beta[\vec{m}, n]$ para todo $n \in M$

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \beta[\Phi(\vec{m}), \Phi(n)]$ para todo $\Phi(n) \in N$ (pois Φ é sobrejetora)

  $\leftrightarrow \mathcal{N} \models \alpha[\Phi(\vec{m})]$

$\square$

Como vimos na prova, no caso de isomorfismo podemos até ir um pouco além: se Φ é isomorfismo, $\phi(v_1, ..., v_k)$ é $\mathcal{L}$-fórmula e $m_i \in M$, temos que $\mathcal{M} \models \phi[m_1, ..., m_k]$ se e só se $\mathcal{N} \models \phi[\Phi(m_1), ..., \Phi(m_k)]$.

Essa é equivalência elementar, entre dois conjuntos diferentes. Contudo, se $\mathcal{M}$ é subestrutura de $\mathcal{N}$, podemos pedir algo um pouco mais forte:

Definição (Subestrutura elementar)**.** Se $\mathcal{M}$ é subestrutura de $\mathcal{N}$, então $\mathcal{M}$ é **subestrutura elementar** de $\mathcal{N}$, ou $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, quando $\mathcal{M} \models \phi[\vec{m}]$ se e só se $\mathcal{N} \models \phi[\vec{m}]$, tal que $\phi(\vec{v})$ é qualquer $\mathcal{L}$-fórmula e $s : Var \to M$ é uma atribuição de variáveis tal que $s(v_i) = m_i$.

Em essência, estamos pedindo que elementos de M se comportem do mesmo jeito em $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Uma consequência é que subestruturas elementares também são **submodelos** do modelo $\mathcal{M}$: isto é, qualquer teoria que $\mathcal{M}$ modela também será modelada pelas suas subestruturas elementares.

Existe uma formulação equivalente que pode ser mais clara, contudo:

Teorema (Teste de Tarski-Vaught)**.** Seja $\mathcal{M}$ subestrutura de $\mathcal{N}$. São equivalentes:

- $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$;
- Se $\phi(x, \vec{y})$ é uma fórmula e $a_i \in M$, então se existe $n \in N$ tal que $\mathcal{N} \models \phi[\vec{a}, n]$, deve existir $m \in M$ tal que $\mathcal{N} \models \phi[\vec{a}, m]$

Alternativamente, então, estamos pedindo que se $\mathcal{N} \models \exists x \psi[\vec{a}, x]$, com $a_i \in M$ e x ainda sendo uma variável, então precisa existir alguma testemunha em M que valide essa afirmação existencial.

Podemos usar esse teorema para concluir o teorema mais preocupante para a teoria de conjuntos:

Teorema (Teorema de Löwenheim-Skolem para baixo)**.** Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem contável e $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura. Então $\mathcal{M}$ possui uma subestrutura elementar contável.

Demonstração. A ideia subjacente é que, se a linguagem só gera uma quantidade contável de fórmulas existenciais, a estrutura só precisa ter uma quantidade contável de testemunhas para essas fórmulas. Para formalizar isso, definimos um novo objeto:

Definição. Seja $\psi(\vec{y}, x)$ uma $\mathcal{L}$-fórmula. Uma **função de Skolem** é uma função f_ψ tal que $\mathcal{M} \models \exists x \psi[\vec{m}, x] \to \mathcal{M} \models \psi[\vec{m}, f_\psi(\vec{m})]$, para qualquer $\vec{m} \in M$. Em essência, funções de Skolem selecionam uma **testemunha** para a fórmula $\exists x \psi(x)$: um elemento de M que justifica a asserção dessa fórmula existencial. Naturalmente, se ψ possui outras variáveis livres, a nossa testemunha depende delas também.

Podemos então tomar F como o conjunto das funções de Skolem f_ϕ para cada fórmula ϕ da linguagem $\mathcal{L}$. Esse conjunto é contável (pois $\mathcal{L}$ é contável e toda ϕ é só uma sequência finita de elementos de $\mathcal{L}$). Seja então A um subconjunto contável não-vazio de M. Podemos fazer a seguinte construção:

$$A_0 = A$$
$$A_{i+1} = \{f(\vec{a}) \,|\, a \in A_i, f \in F\}$$

Intuitivamente, a cada passo estamos adicionando todos os elementos que são testemunhados pelas funções em F parametrizadas pelos elementos em A_i. Podemos então tomar a união de todos esses conjuntos:

$$A_\omega = \bigcup_{i\in\omega}\{A_i\}$$

Esse conjunto é uma subestrutura: a presença das constantes é garantida pela existência de testemunhas para fórmulas do tipo $\exists x(x = c)$ e o fechamento sob as funções é garantido por fórmulas do tipo $\exists x(x = f(\vec{y}))$ (com $\vec{y}$ livre). Ele também satisfaz o teste de Tarski-Vaught por construção: estamos colocando testemunhas em A_ω para todas as afirmações existenciais que M modela. Por fim, ele é contável, pois é uma união contável de conjuntos contáveis (A é contável e F também). Assim, temos uma subestrutura elementar contável de $\mathcal{M}$. □

Isso significa que a teoria de conjuntos (cuja assinatura é finita, só tendo o símbolo de relação $\in$) pode ser modelada por um conjunto contável, *se ela possui algum modelo.*

Como sugerido no "para baixo", esse teorema é acompanhado por uma versão "para cima":

Teorema (Teorema de Löwenheim-Skolem para cima)**.** Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem contável, $\mathcal{M}$ uma $\mathcal{L}$-estrutura *infinita* e κ um cardinal. Então existe uma estrutura $\mathcal{N}$ tal que $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ e $|N| \geq \kappa$.

Não demonstraremos esse teorema aqui, mas algo próximo dele é simples de demonstrar por compacidade:

Teorema. Seja Γ um conjunto de sentenças que possui um modelo infinito e κ um cardinal infinito. Existe $\mathcal{M} \models \Gamma$ tal que $|M| \geq \kappa$.

Demonstração. Seja $\mathcal{L}^+$ a linguagem $\mathcal{L}$ mas acrescida de novos símbolos de constante $\{d_i \,|\, i \in \kappa\}$, e Γ^+ o conjunto de sentenças Γ acrescido de novas sentenças $\Delta = \{d_i \neq d_j \,|\, i, j \in \kappa, i \neq j\}$. Qualquer subconjunto finito de Γ^+ é satisfatível: Γ já era satisfatível, e qualquer subconjunto finito de Δ só afirma que existem um número finito de elementos distintos. Assim, compacidade diz que Γ^+ é satisfatível, portanto existe um modelo que satisfaz Γ e, por satisfazer Δ, possui ao menos κ elementos distintos. $\square$

Podemos notar algo interessante sobre compacidade nessa prova: ela não só permite o passo de indução usual do finito para o infinito contável (o que costuma ser chamado de "compacidade contável"), mas sim um passo de indução do finito para qualquer infinito.

Em suma, esses teoremas significam que, para qualquer estrutura infinita $\mathcal{M}$, não é possível definir um conjunto de axiomas de primeira ordem que só descreve essa estrutura e nada mais. No mínimo, esses axiomas também descreverão os modelos alternativos previstos por Löwenheim-Skolem: e, por esses modelos possuirem cardinalidades diferentes, eles não são isomorfos entre si. Em outras palavras, teorias com modelos infinitos não são **categóricas**: elas possuem mais de um modelo.

3 Teoria de Conjuntos

3.1 Relativização

Nas próximas duas seções faremos um desenvolvimento de ideias um pouco mais avançadas da teoria dos conjuntos que são necessárias para entender o *forcing*. Seguiremos o capítulo 6 de Weaver (2); os capítulos 2-5 podem ser consultados para os básicos de teoria de conjuntos pressupostos.

O nosso objetivo principal nessa seção é construír o modelo base a partir do qual trabalharemos: um modelo M **contável**, **standard** e **transitivo**. Vimos na seção anterior que, pelo teorema de Lowenheim-Skolem para baixo, conseguimos um modelo contável a partir de qualquer modelo. Nessa seção, cuidaremos das outras duas propriedades.

Os resultados da teoria de modelos que já vimos são gerais: eles se aplicam a qualquer teoria de primeira ordem, incluíndo ZFC. Para analisar ZFC em específico, contudo, é comum usar uma linguagem diferente, que internaliza a ideia de um modelo da teoria de conjuntos ao universo de von Neumann, V.

Definição (Relativização)**.** Se ϕ é uma fórmula da teoria de conjuntos, $\phi_{\restriction M}$ é a fórmula obtida restringindo todos os quantificadores ao conjunto $M \subset V$: "$\forall x(\psi)$"vira "$\forall x(x \in M \to \psi)$"e "$\exists x(\psi)$"vira "$\exists x(x \in M \wedge \psi)$". Dizemos que $\phi_{\restriction M}$ é a **relativização de ϕ em** M, e, como usual em provas informais, escreveremos quantificação restrita como $\forall x \in M(\psi)$ e $\exists x \in M(\psi)$.

A ideia de relativizar uma fórmula ϕ a um conjunto M é análoga a ideia de interpretar uma fórmula ϕ num modelo $\mathcal{M}$ de domínio M. Contudo, relativização também garante que a interpretação da relação de pertencimento em $\mathcal{M}$, $\in^{\mathcal{M}}$, é a mesma relação de pertencimento $\in$ usual em V, só restrita ao conjunto M. Essa propriedade desses modelos é o que os torna modelos ***standard***.

Podemos, então, transformar axiomas e teoremas sobre V em propriedades de conjuntos arbitrários. Um conjunto M é denotado **extensional** se nele vale o axioma da extensionalidade relativizado: dois conjuntos $x, y \in M$ são diferentes se e só se $x \cap M$ for diferente de $y \cap M$, isto é, se os seus elementos (relativizados à M) são diferentes.

Introduziremos aqui dois resultados úteis relacionados à relativização (provas podem ser vistas nos capítulos 6 e 7 de Weaver (2)):

Teorema (Lema do colapso de Mostowski)**.** Seja M um conjunto extensional. Então existe N transitivo tal que M e N são $\in$-isomorfos (i.e. isomorfos quanto à linguagem de ZFC, que só possui o símbolo de relação $\in$). Tanto N quanto o isomorfismo $\Phi : M \to N$ são únicos.

e, para fórmulas arbitrárias ϕ, podemos demonstrar o "esquema de teorema":

Teorema (Princípio da reflexão)**.** Existe um conjunto contável transitivo M tal que $\phi \leftrightarrow \phi_{\restriction M}$

Esses resultados, combinados com Löwenheim-Skolem, serve para justificar o seguinte conjunto de axiomas:

Definição (ZFC^+)**.** ZFC^+ é um conjunto de axiomas que consiste em:

- Os axiomas ZFC
- A afirmação que existe um conjunto, denotado pelo novo símbolo de constante M, contável e transitivo
- Os axiomas ZFC relativizados à M

Teorema. Se ZFC é consistente, ZFC^+ também é.

Demonstração. Se ZFC^+ é inconsistente e ZFC é consistente, existe uma prova de uma contradição $\phi \wedge \neg\phi$ que usa algum dos axiomas ZFC relativizados a M (pois ZFC por si só é consistente). Essa prova é finita, então uma sequência finita de axiomas $\alpha^1_{\restriction M} \ldots \alpha^n_{\restriction M}$ são usados. $\beta = \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \ldots \wedge \alpha^n$ (a conjunção dos axiomas apropriados não-relativizados) é um teorema de ZFC, então pelo princípio da reflexão existe uma prova que existe um conjunto contável transitivo N tal que vale $\beta_{\restriction N}$, i.e. valem os axiomas relativizados a N. Podemos então concatenar a nossa prova de uma contradição a partir de ZFC^+ ao final dessa prova de $\beta_{\restriction N}$, mas substituindo todas as instâncias de M na prova da contradição para N. Temos então uma prova em ZFC de $\phi' \wedge \neg\phi'$, onde ϕ' tem todas as instâncias de M substituídas por N. Essa fórmula ainda é uma contradição, então conseguimos construir uma prova de contradição partindo de ZFC usando uma prova de contradição partindo de ZFC^+. $\square$

Assim, daqui para frente, trabalharemos em ZFC^+: essencialmente ZFC, acrescido da hipótese que existe um modelo contável e transitivo de ZFC.

3.2 Absolutez

Antes de falar de *forcing*, é relevante delimitar quais tipos de sentenças são passíveis de serem demonstradas pelo uso da técnica. Para esse fim, exploramos a noção de absolutez:

Definição (Absolutez)**.** Sejam $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ modelos. Uma sentença ψ é dita *absoluta entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$* quando $\mathcal{M} \models \psi \iff \mathcal{N} \models \psi$ (ou, para fórmulas abertas, $\mathcal{M} \models \psi[\vec{a}] \iff \mathcal{N} \models \psi[\vec{a}]$, para qualquer $\vec{a}$ tal que $a_i \in M \cap N$). Mais fracamente, se $\mathcal{M} \models \psi \implies \mathcal{N} \models \psi$, dizemos que ψ é absoluta para baixo quando $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ e absoluta para cima quando $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

Seguindo Kunen (3, p. 117), podemos também definir absolutez usando a noção de relativização. Isso é particularmente útil se desejamos dizer que certas fórmulas são absolutas entre algum modelo M da teoria de conjuntos e o universo V:

Definição (Absolutez em V)**.** Seja $M \subset V$ um modelo da teoria de conjuntos. Uma fórmula $\psi(x_1 \ldots x_n)$ é dita *absoluta entre M e V* (ou só absoluta em M) se vale:
$\forall x_1 \ldots x_n \in M\, (\psi_{\upharpoonright M}(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow \psi(x_1 \ldots x_n))$

A ideia, aplicada ao *forcing*, é que podemos demonstrar a absolutez de certas classes de sentenças para certas classes de modelos. Com isso, demonstramos que essas sentenças não são passíveis de resultados de independência (onde um modelo da classe satisfaz ϕ e outro $\neg\phi$), e resultados de consistência se tornam mais fortes (pois se algum modelo $\mathcal{M} \models \phi$ então o mesmo vale para qualquer outro modelo da mesma classe).

Um dos exemplos mais famosos de uma propriedade não-absoluta na teoria de conjuntos está no paradoxo de Skolem. Pelo teorema de Löwenheim-Skolem para baixo, se a teoria de conjuntos ZFC possui algum modelo (infinito), ela tem um modelo contável $\mathcal{M}$. Mas a teoria de conjuntos ZFC prevê a existência de conjuntos incontáveis: por exemplo, o conjunto das partes de ω. Como esses conjuntos podem ser incontáveis, se eles pegam os seus elementos de um domínio contável M?

A resposta é que contabilidade não é uma propriedade absoluta. Dizer que X é contável é dizer que existe uma bijeção F entre X e ω. Contudo, mesmo se essa bijeção existe em V, ela não necessáriamente precisa existir em M. Dessa forma, um mesmo conjunto X pode ou não ser contável, dependendo do contexto - o modelo - no qual ele está.

Nessa seção, falaremos de resultados de absolutez entre os modelos de ZFC que tratamos em forcing.

Considere uma fórmula livre de quantificadores. É fácil ver que ela é absoluta em qualquer $M \subset V$: as fórmulas atômicas são $x = y$ e $x \in y$, e para quaisquer x, $y \in M$ elas valem em M se e só se elas valem em V (pois os elementos relevantes são os mesmos). Contudo, se estamos tratando de modelos transitivos, podemos até ir um pouco além:

Teorema. Seja $M \subset V$ um modelo transitivo da teoria de conjuntos. Qualquer fórmula que só possui quantificação restrita (i.e. todos os quantificadores são da forma $\forall x \in y$ ou $\exists x \in y$) é absoluta em M.

Demonstração. Seja $\phi = \exists x \in y(\psi) = \exists x((x \in y) \wedge \psi)$ e suponha que ψ é absoluta em M. Por transitividade, $\phi_{\restriction M} = \exists x((x \in M) \wedge (x \in y) \wedge \psi_{\restriction M})$ é equivalente a $\exists x((x \in y) \wedge \psi_{\restriction M})$: y pertence a M (pela definição de absolutez em V, as variáveis livres só percorrem M), portanto se $x \in y$ então $x \in M$. Pela hipótese que ψ é absoluta, $\phi_{\restriction M}$ é equivalente a $\exists x((x \in y) \wedge \psi)$. Portanto $\phi_{\restriction M}$ é equivalente a ϕ, e ϕ é absoluta. Por indução na quantidade de quantificadores (e traduzindo $\forall x \psi$ como $\neg \exists x \neg \psi$), obtemos o teorema. $\square$

Essas fórmulas consistem na base de uma hierarquia chamada de hierarquia de Lévy. A hierarquia de Lévy é uma forma de caracterizar a complexidade de fórmulas da teoria de conjuntos ZFC. Em essência, fórmulas com maior profundidade de alternância de quantificação irrestrita ($\forall \vec{x}\, \exists \vec{y}\, \forall \vec{z}\, ...$) são tratadas como mais complexas.

Definição (Hierarquia de Lévy)**.** Definida por indução:

- $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ são todas as fórmulas equivalentes a uma fórmula ψ onde todos os quantificadores estão restritos: aquelas descritas no teorema anterior.
- Σ_{n+1} são as fórmulas equivalentes a uma fórmula $\psi = \exists x_1 ... \exists x_k \phi$. onde $\phi \in \Pi_n$
- Π_{n+1} são as fórmulas equivalentes a uma fórmula $\psi = \forall x_1 ... \forall x_k \phi$, onde $\phi \in \Sigma_n$
- $\Delta_n = \Sigma_n \cap \Pi_n$

Note que essa definição não se preocupa muito com a sintaxe das fórmulas individuais, mas sim com classes de equivalência de fórmulas em ZFC. Para clarificar a teoria sob a qual estamos definindo equivalência, podemos usar (por exemplo) o superscript Δ_n^{ZFC}. No teorema anterior, então, demonstramos que todas as fórmulas Δ_0^{ZFC} são absolutas em qualquer M transitivo.

Uma noção relacionada são as hierarquias analítica e aritmética. Nesse caso, o superscript denota a ordem da teoria aritmética na qual estamos trabalhando: Δ^0_n (hierarquia aritmética) se refere a fórmulas de primeira ordem (que falam somente sobre números naturais), enquanto Δ^1_n (hierarquia analítica) se refere a fórmulas de segunda ordem (que falam sobre funções dos naturais aos naturais). A definição é análoga:

Definição (Hierarquia analítica)**.** Definida por indução:

- $\Delta^1_0 = \Sigma^1_0 = \Pi^1_0$ são todas as fórmulas equivalentes a uma fórmula ψ onde todos os quantificadores estão restritos a $\mathbb{N}$. Essas são as fórmulas da aritmética de primeira ordem usual.
- Σ^1_{n+1} são as fórmulas equivalentes a uma fórmula $\psi = \exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \phi$. onde $\phi \in \Pi^1_n$
- Π^1_{n+1} são as fórmulas equivalentes a uma fórmula $\psi = \forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \phi$, onde $\phi \in \Sigma^1_n$
- $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$

Não entraremos a fundo na hierarquia analítica aqui. Contudo, ela permite que expressemos um resultado útil para o *forcing* (que não provaremos):

Teorema (Teorema de absolutez de Shoenfield)**.** Toda Σ^1_2-fórmula e Π^1_2-fórmula é absoluta para todo modelo transitivo M de ZF que contêm os mesmos ordinais que V.

Esse teorema é útil pois ele coloca um limite razoável no uso do *forcing* para atacar outros problemas não resolvidos na matemática: vários problemas em aberto, desde os obviamente aritméticos (e.g. conjectura dos primos gêmeos) até os menos óbvios (e.g. P = NP) são equivalentes a fórmulas menores ou iguais que Σ^1_2 e/ou Π^1_2 na hierarquia, e portanto são absolutos para os modelos gerados pelo *forcing* (que possuem os mesmos ordinais que V). Assim, não podemos usar *forcing* para provar a independência desses problemas de ZF(C).

3.3 Forcing

Existem outras maneiras de caracterizar o *forcing* via álgebras booleanas. Contudo, aqui seguiremos o formalismo feito em Weaver (2).

Seja M o nosso modelo contável e transitivo previsto nos axiomas de ZFC^+. Os nossos axiomas permitem fazer as nossas construções usuais relativizadas a M: por exemplo, existe algum $\emptyset^M$ que satisfaz o axioma do conjunto vazio relativizado a M, ou algum $P(\omega)^M$ que satisfaz a construção usual do conjunto das partes de ω relativizada a M. Contudo, como discutido na parte de absolutez, esses conjuntos não necessáriamente são os mesmos que em V: para que sejam, precisamos que a fórmula $\phi(x)$ que afirma "x é um conjunto vazio"ou "x é o conjunto de partes de ω"seja absoluta entre M e V.

Como também demonstrado na última seção, a transitividade do modelo implica que propriedades que só dependem dos elementos de algum conjunto x são absolutas: nesse caso a propriedade só depende de quantificadores da forma "existe y em x"ou "para todo y em x", então se $x \in M$ por transitividade temos que $x \subset M$ e a relativização não muda nada. Por isso é fácil ver, por exemplo, que a propriedade de ser um ordinal é absoluta: "x é totalmente ordenado por $\in$"e "x é transitivo"ambos só dependem de elementos de x.

Pelo argumento que fizemos para o paradoxo de Skolem, tanto $\aleph_1$ quanto $P(\omega)$ não são conjuntos absolutos, e $\aleph_1^M$ e $P(\omega)^M$ são conjuntos (infinitos) contáveis em V. Portanto, existe alguma bijeção entre esses dois conjuntos em V. Para demonstrar a hipótese do contínuo (que os dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade) em M, precisamos inserir essa bijeção em M, sem fazer com que M deixe de ser modelo de ZFC. Aqui introduziremos parte do formalismo desenvolvido para fazer isso.

Suponha que desejamos adicionar uma função de ω em $\{0, 1\}$ a M. Faz sentido considerar essa ação como sendo um procedimento: ao invés de inserir a função toda de uma vez, podemos inserir em cada passo funções de subconjuntos finitos $A \subset \omega$ em $\{0, 1\}$, tal que ao fim do procedimento temos várias funções que, unidas, são a função desejada. Usando essa ideia como guia, podemos fazer a seguinte construção:

Definição. Seja P um conjunto (no nosso exemplo motivador, o conjunto de todas as funções de subconjuntos finitos $A \subset \omega$ em $\{0, 1\}$). Então:

- Se $p, q \in P$ e $p \subseteq q$ então q é uma **extensão** de p.
- Dois elementos $p, q \in P$ são **compatíveis** se existe $r \in P$ que estende ambos.
- Um subconjunto D de P é **denso** se para todo $p \in P$ existe $d \in D$ que estende p. Ele é **denso acima de** p se toda extensão de $p \in P$ possui extensão em D.

O conjunto $P \in M$, nesse contexto, será chamado de um **forcing**.

Definição. Um **ideal** G de um forcing P é um subconjunto $G \subseteq P$ que satisfaz:

1. **Estabilidade para baixo**: se $q \in G$ e q estende $p \in P$ então $p \in G$
2. **Direcionalidade**: se $p_1, p_2 \in G$ então existe $q \in G$ que estende p_1, p_2

Esse ideal é **genérico** para M se ele intersecta todo $D \subseteq P$ denso que existe em M.

No nosso exemplo motivador, um ideal G é um conjunto de funções compatíveis entre si: se tomarmos a união de um ideal, ela será uma função de algum $A \subseteq \omega$ em $\{0, 1\}$.

Um ideal genérico, em específico, é o que estamos procurando: se tomarmos a união dele, ele será uma função de ω em $\{0, 1\}$. Isso é porque, para todo $n \in \omega$, o conjunto D_n que contém todas as funções com n no seu domínio é denso: toda função $p \in P$ ou já possui n no domínio ou pode ser estendida a uma função com n no domínio. Assim, um ideal genérico intersecta Dn para todo $n \in \omega$, e portanto a sua união possui todo $n \in \omega$ no seu domínio.

Por isso, o seguinte teorema é importante:

Teorema. Seja P um forcing e $p_0 \in P$. Então existe um ideal genérico G de P tal que $p_0 \in G$.

Demonstração. Já que M é contável, então o conjunto de densos de P é contável. Podemos então enumerá-los como (D_n). Definimos a sequência (p_n) (iniciada em p_0) tal que, para todo p_n, p_{n+1} é uma extensão de p_n presente em D_n. Então o conjunto

$G = \{p \in P \,|\, p \subseteq p_n \text{ para algum } n\}$

é ideal genérico para M. Estabilidade para baixo e genericidade valem pela definição, enquanto direcionalidade vale pois, se $p \subseteq p_n$, $q \subseteq p_m$ e (sem perda de generalidade) $p_n \subseteq p_m$, então $p, q \subseteq p_m$. $\square$

4 Conclusão

Trabalho conseguiu fazer um adentramento razoável em lógica. Contudo, o aprofundamento no tópico nominal da pesquisa (forcing) não foi muito grande, em parte devido à complexidade do tópico e em parte devido a um foco maior dado para a frente de teoria de modelos. Algumas possibilidades de tópicos relacionados de pesquisa, ou para continuidade da pesquisa na pós-graduação ou como sugestão para alunos interessados na área:

- **Continuidade em forcing**: Uma exploração completa do tópico de forcing não foi feita, então é possível avançar no tópico pelos livros-texto escolhidos.

- **Justificação de axiomas**: Frente a resultados de independência, quais os critérios pelos quais devemos escolher quais axiomas adotar? Em um nível mais básico, se estamos trabalhando na formalização de alguma área da matemática, como podemos escolher axiomas bons?

- **Computabilidade**: A área da computabilidade fornece vários resultados interessantes: por exemplo, resultados relacionados à hierarquia analítica vista na parte de absolutez. Uma pesquisa mais avançada na área de computabilidade pode ser interessante.

- **Modelos nonstandard**: Existe alguma pesquisa na área de modelos unusuais da aritmética ou da análise. Investigar como esse tratamento é feito pode ser interessante.
- **Interpretabilidade**: Modelos gerados por técnicas de IA modernas para resolver problemas costumam se comportar da forma esperada para resolver aquele problema, mas não é fácil extrair o porquê deles se comportarem daquela maneira. Técnicas da lógica, entre outras, estão sendo pesquisadas para resolver esse problema (ou "interpretando"modelos em arquiteturas existentes, ou criando novas arquiteturas que são mais fácilmente interpretáveis).
- **Visões filosóficas sobre a matemática**: Existem várias perspectivas sobre como devemos pensar sobre a matemática, com alguma intersecção com filosofia da ciência: platonismo, ficcionalismo, nominalismo, finitismo, construtivismo, instrumentalismo etc. Pode ser interessante fazer um apanhado geral dessas perspectivas, ou analisar as consequências de alguma em específico.

Referências

1 MARKER, D. *Model Theory : An Introduction*. 2002. ed. New York, NY: Springer, 2002. (Graduate Texts in Mathematics).

2 WEAVER, N. *Forcing for Mathematicians*. WORLD SCIENTIFIC, 2014. ISBN 9789814566018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1142/8962>.

3 KUNEN, K. *Set theory: an introduction to independence proofs*. Oxford, England: North-Holland, 1983. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).