

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**  
**PRG - CURSO DE CIÊNCIAS MOLECULARES**

RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA  
CICLO AVANÇADO - 2º SEMESTRE / 2023  
CCM0418 - INICIAÇÃO À PESQUISA III

TURMA 29

**Provas de independência via forcing**

Estudante Joel Soares Moreira NUSP: 11225742  
joelsm@usp.br

Orientador Prof. Edélcio Gonçalves de Souza

**FFLCH - Departamento de Filosofia**

# 1 Resumo do projeto

Ferramentas modelo-teoréticas possuem grande potencial para serem aplicadas em outras áreas da matemática. Um exemplo notável foi o desenvolvimento da técnica de *forcing* por Paul Cohen. Essa técnica, originalmente desenvolvida para demonstrar a independência da Hipótese do Contínuo dos axiomas ZFC da teoria de conjuntos, se tornou uma ferramenta útil não só na teoria de conjuntos, mas também na análise e na teoria dos números.

O *forcing* funciona através da construção de modelos alternativos dos axiomas da teoria de conjuntos (geralmente os axiomas ZFC) mas que também satisfazem alguma afirmação extra  $\alpha$  (por exemplo, a Hipótese do Contínuo ou sua negação). A existência desses modelos então permite dizer, em termos modelo-teoréticos, que ZFC é consistente com  $\alpha$  (i.e. existe um modelo onde ZFC e  $\alpha$  são ambos verdadeiros). Se ZFC é consistente com  $\alpha$  e a sua negação, dizemos então que  $\alpha$  é independente de ZFC – ZFC valer num modelo não diz nada sobre se  $\alpha$  vale ou não.

Métodos de *forcing* estão sendo aplicados em diversas áreas da matemática pura, mas o seu caráter obscuro apresenta problemas tanto na produção de provas utilizando *forcing* quanto na sua revisão por pares. O objetivo do projeto é aprender sobre essas técnicas e produzir um artigo que resuma esse aprendizado, para poder construir uma base para outros estudantes e pesquisadores.

## 2 Leituras feitas

### 2.1 Chang & Keisler - Model Theory

Um dos livros-texto para a disciplina de Teoria de Modelos. Foco grande na construção de modelos, particularmente por meios mais algébricos ou topológicos.

### 2.2 Marker - Model Theory

Um dos livros-texto para a disciplina de Teoria de Modelos. Usado principalmente como fonte para a ideia de Henkinização de modelos.

## 3 Disciplinas Cursadas

A disciplina de Teoria de Conjuntos da pós que planejava cursar esse semestre não foi oferecida. Apresentarei uma proposta de grade para cobrir os créditos quando as

disciplinas do semestre que vem estiverem disponíveis.

### 3.1 MAT5865 - Teoria dos Modelos e Aplicações

Matéria de Teoria de Modelos da pós-graduação. Foi bem aprofundada e complexa, passando tanto pelos tópicos que eu esperava (semântica tarskiana básica, construção de modelos via Henkinização e ultraprodutos, teoria de tipos) quanto por tópicos relativamente modernos que eu não esperava (eliminação de quantificadores, modelos saturados, categoricidade).

De particular nota foi o uso da semântica tarskiana na disciplina (e nos livros-texto). Em geral a "semântica" para primeira-ordem vista em livros que não são explicitamente de teoria de modelos recorre a um símbolo de constante auxiliar para definir a interpretação de sentenças quantificadas. A definição é algo como:

"Se  $\mathcal{M}$  é um  $\mathcal{L}$ -modelo e  $\phi$  é uma sentença de forma  $\exists x\psi(x)$ , então  $\mathcal{M} \models \phi$  se e só se existe  $m \in M$  tal que  $\mathcal{M}[a] \models \psi[a/x]$ , onde  $\mathcal{M}[a]$  é o modelo obtido pela adição de um símbolo de constante  $a$  à linguagem  $\mathcal{L}$  tal que  $a^{\mathcal{M}} = m$ ."

Essa abordagem é justificada por uma única coisa: evitar uma semântica que dá valor de verdade (ou sequer um "valor de satisfatibilidade") para fórmulas com variáveis livres.

Contudo, trabalhar com a semântica de Tarski deixou claro que permitir fórmulas com variáveis livres é bem útil. A ideia de tipos (conjuntos de fórmulas com algum número de variáveis livres), por exemplo, permite a construção e caracterização de várias classes diferentes de modelos. Além disso, permitir que parametrizemos uma fórmula diretamente por elementos do domínio na metalógica, sem depender de criar símbolos de constante na linguagem, deixa várias provas mais sucintas e diretas. Se não pudessemos fazer isso, imagino que vários teoremas teriam que ser prefixados por uma Henkinização do modelo, para que tenhamos nomes acessíveis para todos os elementos do domínio.

Em geral, acho que fórmulas com variáveis livres ficam menos problemáticas se você trata elas como sentenças parametrizadas, com as variáveis livres só sendo nomes para os parâmetros. De fato, é comum introduzir sentenças dizendo que fórmulas bem-formadas como " $x = 1$ " não são suficientes pois "precisamos dizer quem é  $x$ " para determinar se elas são verdadeiras. Nesse sentido, as atribuições de variáveis tarskianas são bem naturais.

## 4 Produção textual

Comecei a produção do texto final. A maioria dos meus esforços de escrita e leitura foram dedicados à ele, por isso o relatório semestral curto.

## 5 Planos para próximo semestre

### 5.1 Disciplinas à cursar

Planejo cursar a disciplina de Lógica III semestre que vem. Para completar os créditos do curso (frente à perda da disciplina de Teoria de Conjuntos esse semestre), visto que não tem muitas outras matérias de lógica na USP, o meu plano é cursar matérias da área de computação por interesse pessoal. Uma proposta de mudança de grade será submetida quando as disciplinas do semestre que vem forem disponibilizadas.

### 5.2 Produção textual

Planejo continuar a escrita do texto final.

## Referências