UNIVERSIDADE DE SÂO PAULO
PRG - CURSO DE CIÊNCIAS MOLECULARES

RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA
CICLO AVANÇADO - 1º SEMESTRE / 2023
CCM0328 - INICIAÇÃO À PESQUISA II
TURMA 29

Provas de independência via forcing

Estudante	Joel Soares Moreira	NUSP: 11225742
	joelsm@usp.br	
Orientador	Edélcio Gonçalves de Souza	

FFLCH - Departamento de Filosofia

1 Resumo do projeto

Ferramentas modelo-teoréticas possuem grande potencial para serem aplicadas em outras áreas da matemática. Um exemplo notável foi o desenvolvimento da técnica de *forcing* por Paul Cohen. Essa técnica, originalmente desenvolvida para demonstrar a independência da Hipótese do Contínuo dos axiomas ZFC da teoria de conjuntos, se tornou uma ferramenta útil não só na teoria de conjuntos, mas também na análise e na teoria dos números.

O *forcing* funciona através da construção de modelos alternativos dos axiomas da teoria de conjuntos (geralmente os axiomas ZFC) mas que também satisfazem alguma afirmação extra α (por exemplo, a Hipótese do Contínuo ou sua negação). A existência desses modelos então permite dizer, em termos modelo-teoréticos, que ZFC é consistente com α (i.e. existe um modelo onde ZFC e α são ambos verdadeiros). Se ZFC é consistente com α e a sua negação, dizemos então que α é independente de ZFC – ZFC valer num modelo não diz nada sobre se α vale ou não.

Métodos de *forcing* estão sendo aplicados em diversas áreas da matemática pura, mas o seu caráter obscuro apresenta problemas tanto na produção de provas utilizando *forcing* quanto na sua revisão por pares. O objetivo do projeto é aprender sobre essas técnicas e produzir um artigo que resuma esse aprendizado, para poder construir uma base para outros estudantes e pesquisadores.

2 Participação em eventos

2.1 SPLogIC 2023

Participei na *São Paulo School of Advanced Science on "Contemporary Logic, Rationality, and Information" - SPLogIC* em fevereiro. O evento foi uma escola de verão de duas semanas oferecendo oito cursos em lógica, além de aulas magnas apresentadas por convidados e apresentação de palestras e *posters* por alunos de graduação e pós-graduação do mundo todo. Além de assistir os cursos, eu apresentei um *poster* sobre o projeto presente na feira, que foi um dos premiados.

A escola foi dedicada ao aniversário de 90 anos do Newton da Costa, o lógico da Unicamp que deu origem ao estudo de lógicas paraconsistentes (lógicas não-clássicas onde não podemos deduzir tudo a partir de uma contradição, i.e. que não afirmam o princípio da explosão). Boa parte do conteúdo da escola foi focado em lógicas paraconsistentes ou lógicas não-clássicas em geral, sem entrar muito em teoria de conjuntos. Contudo, o conteúdo ainda foi bem enriquecedor.

Mesmo que o conteúdo não tenha sido muito relacionado com teoria de conjuntos ou de modelos, o desafio de apresentar o meu projeto e discutí-lo com outras pessoas (particularmente pessoas sem background em teoria de conjuntos) foi bem útil para estabelecer quais os pontos que eu acho interessantes da minha pesquisa em termos mais gerais, e como conectar esses pontos com discussões filosóficas ou científicas mais amplas.

3 Disciplinas Cursadas

3.1 Anéis e Corpos - MAT0264

Como esperado, a disciplina teve muito overlap com o conteúdo de Grupos – vários conceitos e teoremas vistos em Grupos possuem equivalentes em anéis. A revisão desses conceitos com a adição de uma segunda operação foi interessante para entender noções de álgebra, e os anéis modelo que guiam o estudo de anéis (os inteiros, racionais, reais e complexos) são bem ricos. Assim, os comentários relativos à Grupos no semestre passado se aplicam igualmente para Anéis e Corpos.

Vários conceitos são novos, contudo, e eles são de particular interesse para o estudo de forcing. O mais óbvio é a noção de extensões de anéis, que são comumente usados como metáfora para o funcionamento do forcing: o verbete do nLab sobre forcing (1), por exemplo, usa extensões nilpotentes como exemplo para elucidar a ideia de forcing. A natureza explanatória dessas metáforas é contestado (matemáticos como Asaf Karagila (2) apontam que a lógica e teoria de conjuntos no forcing é inevitável, e só álgebra não é suficiente nem num panorama geral), mas aprender sobre elas ainda é útil. Uma das palestras que assisti na SPLogIC, pelo professor de filosofia da matemática Fernando Zalamea, apontou a importância de ver certas orientações gerais no desenvolvimento matemático (na direção de beleza, formalismo, parsimônia etc): mesmo que a metáfora seja falha, ainda acho útil ver as duas técnicas como sendo instâncias dessa mesma orientação na direção de extender modelos matemáticos.

Noções algébricas como álgebras booleanas também são usadas no forcing, então o conteúdo de Grupos e Anéis e Corpos provávelmente será útil de forma mais direta no futuro. Elas não foram abordadas nessa disciplina, contudo.

3.2 Teoria de Conjuntos - MAT0330

Disciplina bem direta de teoria de conjuntos, lidando com os axiomas ZF, definição de ordinais e cardinais e teoremas relacionados, e o axioma da escolha e teoremas equivalentes. Cobriu o conteúdo do Halmos e um pouco mais.

Em particular, eu achei a abordagem de cardinais muito melhor aprofundada que a feita pelo Halmos. Já que boa parte das aplicações de *forcing* lidam com cardinais incontáveis, ter um bom embasamento na definição de cardinal e na construção de cardinais é essencial para o tópico da IC.

3.3 Forcing e Grandes Cardinais - MAT5003

Assisti a disciplina de verão Forcing e Grandes Cardinais como ouvinte nas férias. Não consegui acompanhar o meio da disciplina muito bem e o final coincidiu com a SPLogIC (então eu não assisti), mas as primeiras aulas nas quais o professor Zanetti estabeleceu (revisou?) a hierarquia analítica foram bem úteis, já que eu não planejava fazer nenhum estudo de teoria da recursão.

4 Leituras Feitas

4.1 Herstein - Topics in Algebra

Livro usado como referência para a disciplina de Anéis e Corpos. A disciplina cobriu toda a seção sobre teoria de anéis (3º capítulo).

4.2 Cohen - The Discovery of Forcing

Artigo que li como referência para produzir meu poster para a SPLogIC.

O artigo é uma transcrição de uma palestra dada por Paul Cohen em 2002 para algebristas sobre forcing. Já que parte do meu objetivo é elucidar metodologias de forcing para audiências matemáticas-mas-não-lógicas e lógicas-mas-não-matemáticas, a proposta da palestra me pareceu útil.

No começo, Cohen faz um apanhado geral da motivação formalista por trás do nascimento da teoria de conjuntos e de métodos anteriores ao dele para provar resultados de consistência – notávelmente, a noção do universo dos construtíveis usada por Gödel. Depois disso, ele elucida a metodologia de *forcing* usando algebra.

Uma nota interessante está no começo da palestra. A interpretação natural de áreas fundamentais, como a teoria de conjuntos ou a lógica, para matemáticos em formação é que essas áreas servem para formalizar as ideias intuitivas sobre conjuntos ou raciocínio com as quais matemáticos de outras áreas trabalham. Essa interpretação natural então pode entrar em questão devido a resultados inesperados que limitam a intuição matemática (e.g. a incompletude de Gödel) ou são úteis em outras áreas (e.g. o lema de Zorn), convencendo o matemático em formação que vale a pena aprender sobre a área.

Contudo, Cohen aponta que resultados relativos à existência de multiplos modelos parecem quebrar completamente a nossa intuição sobre como a matemática deve funcionar, o que faz com que matemáticos potencialmente ignorem áreas fundamentais pela razão oposta: pois os seus resultados não parecem mais representar o nosso raciocínio intuitivo. O objetivo de Cohen ao elucidar o seu método é criar uma ponte entre a intuição e os seus resultados, de forma a mostrar que esses resultados não precisam, a priori, representar um grande desvio da intuição matemática natural.

4.3 Halmos - Naive Set Theory

Livro que usei como referência para a disciplina de Teoria de Conjuntos.

Livro clássico da área. A disciplina de teoria de conjuntos abordou tudo nele e mais um pouco.

4.4 Chang & Keisler - Model Theory

Continuei minha leitura do Chang & Keisler. Já que planejo fazer uma disciplina em teoria de modelos, estou lendo mais lentamente: terminei o 2o capítulo e li a primeira seção do terceiro. Os capítulos são razoávelmente densos, então imagino que a disciplina não usará todo o conteúdo.

4.5 Button & Walsh - Philosophy and Model Theory

Na SPLogIC várias pessoas me perguntaram sobre como a noção de forcing e a teoria de modelos se relacionavam com questões mais amplas da filosofia da matemática (a discussão platonismo vs formalismo apareceu várias vezes) e eu não sentia que eu tinha muitas coisas interessantes para falar sobre o tópico. Para incrementar meu conhecimento da área, venho lendo (também lentamente) o Button & Walsh, que discute usos filosóficos da teoria de modelos e a filosofia da teoria de modelos. Estou no processo de ler o segundo capítulo.

5 Planos para próximo semestre

5.1 Continuidade em leituras

Planejo começar minha leitura do Kunen agora que entendo melhor de teoria de conjuntos e continuar minha leitura do Chang & Keisler, mas imagino que eles terão bastante overlap com as disciplinas de pós do semestre que vem. Continuarei minha leitura do Button & Walsh.

5.2 Disciplinas à cursar

Planejo cursar as disciplinas de pós de Teoria de Modelos e de Teoria de Conjuntos semestre que vem, mas a carga didática não saiu no momento que escrevo isso.

5.3 Produção textual

Planejo continuar a escrita do produto final. Também gostaria em algum ponto produzir uma apresentação sobre os aspectos filosóficos do tópico de pesquisa, para apresentar para a comunidade do curso de Ciências Moleculares.

Referências

1 nLab authors. *forcing*. 2023. <https://ncatlab.org/nlab/show/forcing>. Revision 23.

2 KARAGILA, A. *Forcing. This Has To Stop.* 2014. <https://karagila.org/2014/forcing-this-has-to-stop/>.