UNIVERSIDADE DE SÂO PAULO
PRG - CURSO DE CIÊNCIAS MOLECULARES

RELATÓRIO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

CICLO AVANÇADO - 2º SEMESTRE / 2022

CCM0318 - INICIAÇÃO À PESQUISA I

TURMA 29

Provas de independência via forcing

Estudante Joel Soares Moreira NUSP: 11225742

joelsm@usp.br

Orientador Prof. Edélcio Gonçalves de Souza

FFLCH - Departamento de Filosofia

1 Resumo do projeto

Ferramentas modelo-teoréticas possuem grande potencial para serem aplicadas em outras áreas da matemática. Um exemplo notável foi o desenolvimento da técnica de *forcing* por Paul Cohen. Essa técnica, originalmente desenvolvida para demonstrar a independência da Hipótese do Contínuo dos axiomas ZFC da teoria de conjuntos, se tornou uma ferramenta útil não só na teoria de conjuntos, mas também na análise e na teoria dos números.

O *forcing* funciona através da construção de modelos alternativos dos axiomas da teoria de conjuntos (geralmente os axiomas ZFC) mas que também satisfazem alguma afirmação extra α (por exemplo, a Hipótese do Contínuo ou sua negação). A existência desses modelos então permite dizer, em termos modelo-teoréticos, que ZFC é consistente com α (i.e. existe um modelo onde ZFC e α são ambos verdadeiros). Se ZFC é consistente com α e a sua negação, dizemos então que α é independente de ZFC – ZFC valer num modelo não diz nada sobre se α vale ou não.

Métodos de *forcing* estão sendo aplicados em diversas áreas da matemática pura, mas o seu caráter obscuro apresenta problemas tanto na produção de provas utilizando *forcing* quanto na sua revisão por pares. O objetivo do projeto é aprender sobre essas técnicas e produzir um artigo que resuma esse aprendizado, para poder construir uma base para outros estudantes e pesquisadores.

2 Disciplinas Cursadas

2.1 Grupos - MAT0265

A disciplina foi bem útil para entender melhor o comportamento dos -morfismos (iso, auto, homo) usados regularmente não só na teoria de modelos, como na lógica matemática num geral. Embora esse conhecimento em geral não seja explicitamente cobrado por livros-textos da área (por exemplo, Chang & Keisler(1) dizem somente que conteúdo de álgebra "ajudaria"com o entendimento do livro), eu acredito que ele traga várias vantagens.

A primeira é que o caráter mais restrito de estruturas algébricas comuns como grupos (essencialmente modelos sem relações e não subordinados a nenhuma teoria formal) torna mais fácil o uso de exemplos e o estudo de estruturas particulares, melhorando a didática. A disciplina de Grupos é, em boa parte, um exercício em taxonomia: construímos e estudamos as propriedades de várias categorias de grupos particulares, como grupos de permutação, grupos cíclicos, quocientes, etc.

A segunda, relacionada, é que estudar estruturas particulares torna mais fácil imaginar conceitos que outrora pareciam abstratos demais. A noção de ultraproduto, por exemplo, ficou mais clara após eu ver a intuição espacial para o grupo quociente de um grupo apresentada pela profª Ikemoto (que não aparece em textos como o Herstein) em aula.

Algo muito discutido em Grupos foi que vários conceitos e teoremas vistos em Anéis e Corpos (que vem antes de Grupos na grade da Matemática Pura) possuem análogos em Grupos. Analogias entre a teoria de modelos e esses teoremas algébricos provávelmente serão vistos na disciplina de Teoria de Modelos da pós que planejo fazer no 2º semestre de 2023.

2.2 Lógica III - FLF0444

A disciplina esse semestre lidou com teoria de clones geral, o estudo de funções lógicas. Uma função lógica é uma generalização dos conectivos lógicos usuais: assim como a função AND toma 2 valores de $\{T, F\}$ (e.g. T e F) e retorna um valor de $\{T, F\}$, (e.g. F), a função n-ária k-valorada f toma n valores de $\{0, ..., k-1\}$ e retorna um valor de $\{0, ..., k-1\}$.

O estudo foi focado na relação entre "sistemas", conjuntos de funções lógicas que são fechadas sob definibilidade (f pertence ao sistema S se e só se f pode ser definida a partir da composição de funções em S), e "polimorfismos", conjuntos de funções lógicas que preservam alguma propriedade ou relação (se os argumentos todos possuem a propriedade a saída também possui). Estudamos tanto a teoria de clones geral, com k arbitrário, quanto a teoria de clones na *first-degree entailment*, uma lógica tetravalorada paraconsistente.

Além do conteúdo programático da disciplina, o professor (Roderick Batchelor) e o seu estudante de mestrado discutiram sobre lógica modal algumas vezes em aula, e o estudante de mestrado apresentou uma aula sobre seu projeto de pesquisa. Isso foi interessante, e o meu texto final para a disciplina (tema livre, relacionado com lógica) foi mais próximo da lógica modal do que da teoria de clones.

Em total, fiquei feliz com a disciplina: todo o conteúdo introduzido foi novo para mim, e o meu objetivo ao incluir Lógica III e IV no projeto foi ser exposto à novidades.

3 Leituras Feitas

3.1 Herstein - Topics in Algebra

Livro usado como referência para a disciplina de Grupos. A disciplina cobriu toda a seção sobre teoria de grupos (2º capítulo).

3.2 Field - Metalogic and Modality

Artigo que li como referência para produzir meu trabalho final de Lógica III.

A definição usual de propriedades metalógicas como acarretamento, consistência, tautologia etc. costuma ser dividida numa definição sintática (usando sistemas de prova) e uma semântica (usando modelos ou tabelas-verdade), que se tornam iguais se o teorema da completude vale. O artigo argumenta a favor de tratar essas propriedades de forma primitiva, tomando a definição sintática como condição necessária e a definição semântica como condição suficiente para a propriedade.

A definição natural proposta é usando operadores modais: por exemplo, "A é consistente"pode ser definido com um operador de possibilidade e "não-A é inconsistente"pode ser definido com um operador de necessidade. O artigo então justifica isso dizendo que faz mais sentido filosóficamente, e que facilita o tratamento de sistemas lógicos onde não há garantia de completude.

3.3 Benthem - Modal Logic for Open Minds

Livro que usei como referência para produzir meu trabalho final de Lógica III.

Olhei principalmente as definições dos axiomas que podem ser tomados para lógicas formais (S1, 2, 3 etc), como complemento para o artigo do Field. Contudo, achei o livro interessante e planejo ler ele durante as férias. Lógica modal parece ser a lógica não-clássica mais popular, então ter familiaridade com ela será útil no futuro.

3.4 Chang & Keisler - Model Theory

Continuei minha leitura do Chang & Keisler. Tentei pular para as partes do livro depois do conteúdo que havia visto no "Model Theory: An Introduction", do Marker, mas a forma como o Chang & Keisler lida com as definições iniciais e as provas de teoremas introdutórios (como a prova por Henkin do teorema da compacidade) é feito de forma mais geral, desenvolvendo ferramentas que são usadas no resto do livro. Por isso, acabei lendo o primeiro capítulo e as primeiras seções do segundo capítulo, por ora.

4 Planos para próximo semestre

4.1 Participação em eventos

Participarei na *São Paulo School of Advanced Science on "Contemporary Logic, Rationality, and Information" - SPLogIC* durante as férias, entre os dias 6 e 17 de fevereiro.

Também planejo preparar algumas apresentações em teoria de modelos, para apresentar para a comunidade do CCM.

4.2 Continuidade em leituras

Planejo continuar minha leitura do Chang & Keisler e do Benthem, durante as férias e o primeiro semestre de 2023.

4.3 Disciplinas à cursar

Como planejado, irei cursar as disciplinas de Anéis e Corpos e de Teoria de Conjuntos no IME semestre que vem.

4.4 Produção textual

Planejo começar a produção da introdução do artigo final, com conteúdo básico de teoria de modelos e de teoria de conjuntos.(2) (3) (4)

Referências

1 CHANG, C. C.; KEISLER, H. J. *Model theory*. 3. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics).

2 KUNEN, K. *Set theory: an introduction to independence proofs*. Oxford, England: North-Holland, 1983. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

3 CHOW, T. A beginner's guide to forcing. *Contemporary Mathematics*, v. 479.

4 COHEN, P. The Discovery of Forcing. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, Rocky Mountain Mathematics Consortium, v. 32, n. 4, p. 1071 – 1100, 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.1216/rmjm/1181070010>.