Relatório de Iniciação Científica
à Direção do Curso de Ciências Moleculares

Aluno: Alexandre Hannud Abdo
Orientador: Porf.Dr. Celso Grebogi

São Paulo, Dezembro de 2001

1 Do Projeto...

Estudar o uso de métodos de Sistemas Dinâmicos para tratar o Caos de forma determinística e dar fundamentos dessa natureza à hipótese de Boltzman do Caos Molecular, uma das hipóteses de maior êxito na história da Física. O estudo será mais focalizado numa classe especial de sistemas relacionados a processos de difusão. O interesse pelos sistemas difusivos está na possibilidade de, junto aos estudos, avaliar e pesquisar a aplicação de uma técnica de controle do caos chamada Direcionamento de Trajetórias ("Targeting") a essa classe de sistemas.

2 ...de seu andamento...

O estudo das disciplinas fundamentais para a compreensão dos tópicos necessários ao desenvolvimento do projeto, como Análise Matemática e Mecânica Estatística, em cursos regulares da Universidade, foi um primeiro passo para melhor compreender os artigos ligados estritamente às atividades de Iniciação Científica. Durante este semestre, essas atividades foram essencialmente de leitura e reflexão sobre os textos fundamentais do projeto, envolvendo também, de forma menos significativa, alguma programação de experimentos numéricos. As dificuldades mais frequentes relacionavam-se direta ou indiretamente a problemas com conceitos aos quais não havia uma familiarização prévia.

3 ...e para onde vai?

O objetivo imediato é, naturalmente, continuar aprofundando os conhecimentos nesta linha de pesquisa, porém investindo mais tempo na programação de experimentos numéricos e na análise quantitativa dos problemas; assim espera-se ter alguns resultados em médio prazo, mesmo que modestos.

4 Uma Visão Geral sobre os Tópicos Estudados

4.1 Sistemas Dinâmicos Difusivos

Sistemas Difusivos são encontrados em todo lugar, basta observar a natureza por mais de um instante, portanto não há necessidade de discorrer sobre seu significado. Porém é interessante discutir como, por exemplo, um Mapa Unidimensional pode ser interpretado de forma a obter-se dele algo que seja equivalente a um 'coeficiente de difusão', e outras grandezas físicas. Este é um problema não todo esclarecido, mas no caso estudado, em que o mapa é linear por intervalos e de inclinação 'a' (Fig.[1,2,3]), é possível dar uma resposta.
Para entendermos o 'Coeficiente de Difusão Determinístico' nesse caso, são cruciais a equação fenomenológica da difusão unidimensional:

$$\frac{\delta P}{\delta t} = D\frac{\delta^2 P}{\delta x^2} \tag{1}$$

E a equação de Frobenius-Perron, uma equação de continuidade que representa o movimento da densidade de probabilidade do Sistema Dinâmico no tempo:

$$\rho_{n+1}(x) = \int dy \rho_n(y)\delta[x - M_a(y)] \tag{2}$$

A equação (1) serve como definição para o coeficiente de difusão 'D', enquanto a equação (2) diz respeito ao Mapa em questão. A idéia então é que, quando essas duas equações apresentarem 'certa semelhança' (veja Ref.[5]), o 'Coeficiente de Difusão Determinístico' está bem definido em função da inclinação 'a'.
Porém para poder fazer essa comparação é necessário resolver a Equação de Frobenius-Perron para o sistema. Esta é tarefa não trivial no seu caso genérico, mas para nosso Mapa linear por intervalos, algumas coisas podem ser simplificadas. Por exemplo, se estivermos trabalhando com o caso em que a inclinação 'a=4', é natural notarmos certas 'divisões' do Mapa (Fig. [3]) e pensar em aplicar diretamente o 'Método da Matriz de Transição'; já para um 'a' genérico, é necessário introduzir o conceito de "Partições de Markov".
Verbalmente, uma partição é de Markov, no nosso caso unidimensional, se e só se as Partes da partição são mapeadas novamente sobre Partes da partição, ou sobre uniões de Partes da partição.
Se definirmos uma Partição de Markov para um Mapa de inclinação qualquer, podemos então aplicar o 'Método da Matriz de Transição' para solucionar nosso problema. Esse método consiste em parte em representar o Mapa numa matriz onde cada vetor represente a imagem pelo Mapa de uma particular Parte da Partição de Markov. Iterar o Mapa se traduziria então em multiplicar um vetor densidade de probabilidade das partições pela matriz obtida.
Enfim, uma vez que se consiga calcular D(a), notar-se-á um fato curioso: que o gráfico do coeficiente apresenta diversos tipos de auto-semelhança, um forte indício de que este coeficiente seja Fractal (veja Fig[4]).

4.2 Controle do Caos

A teoria de Controle de Sistemas Caóticos se utiliza das três propriedades fundamentais desses sistemas para, engenhosamente, conseguir controlá-los. Primeiro, pela *sensibilidade às condições iniciais*, sabemos que é possível, com uma pequena mudança no sistema, fazer grandes mudanças nas órbitas; segundo pela *transitividade topológica*, sabemos que em um tempo finito alguma órbita vai passar próxima de onde queremos mantê-la; e finalmente as *órbitas periódicas densas* permitem que as utilizemos para estabilizarmos o sistema em torno delas.

Na prática, o método é o seguinte: o Mapa tem um parâmetro flexível 'p', que pode sofrer uma pequena perturbação δ p cujo máximo é 'Δ p'. Nós procuramos pela perturbação δ p, tal que essa perturbação nos leve de onde estamos para uma vizinhança do nosso alvo em um tempo curto. Uma vez o alvo estando na área de alcance da perturbação, o processo está praticamente encerrado, pois sabemos que existe um δ p que nos levará para ele, basta apenas refinar nossa estimativa. Isso pode ser feito, por exemplo, subdividindo-se o espaço dos parâmetros 'p' ao meio e escolhendo-se a metade que nos leva ao alvo, repetindo essa operação nas iterações seguintes; ou ainda fazer o mesmo mas subdividindo o espaço dos parâmetros em ainda mais pedaços. Esse processo irá nos levar a uma vizinhança arbitrariamente pequena do alvo.

Referências

[1] C. Grebogi,Y.-C. Lai, Controlling chaotic dynamical systems, Systems & Control Lett. 31 (1997) 307-312

[2] T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Using Chaos to Direct Trajectories to Targets, Phys. Rev. Lett. 65 (1990) 3215-3218

[3] T. Shinbrot, E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, Using chaos to direct orbits to targets in systems describable by a one-diensional map, Phys. Rev. A 45 (1992) 4165-4168

[4] R. Klages, Simple Maps with Fractal Diffusion Coefficients, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 387-390

[5] R. Klages, J.R. Dorfman, Simple deterministic dynamical systems with fractal diffusion coefficients, Phys. Rev. E (1999) 5361-5383

[6] R. Klages, Deterministic Diffusion in One-Dimensional Chaotic Dynamical Systems, Wissenschaft und Technik Verlag (1996) ISBN 3-928943-49-9

Alexandre Hannud Abdo　　　　　Prof. Dr. Celso Grebogi

Figura 1: Trecho de mapa, da reta na reta, com inclinação a=3

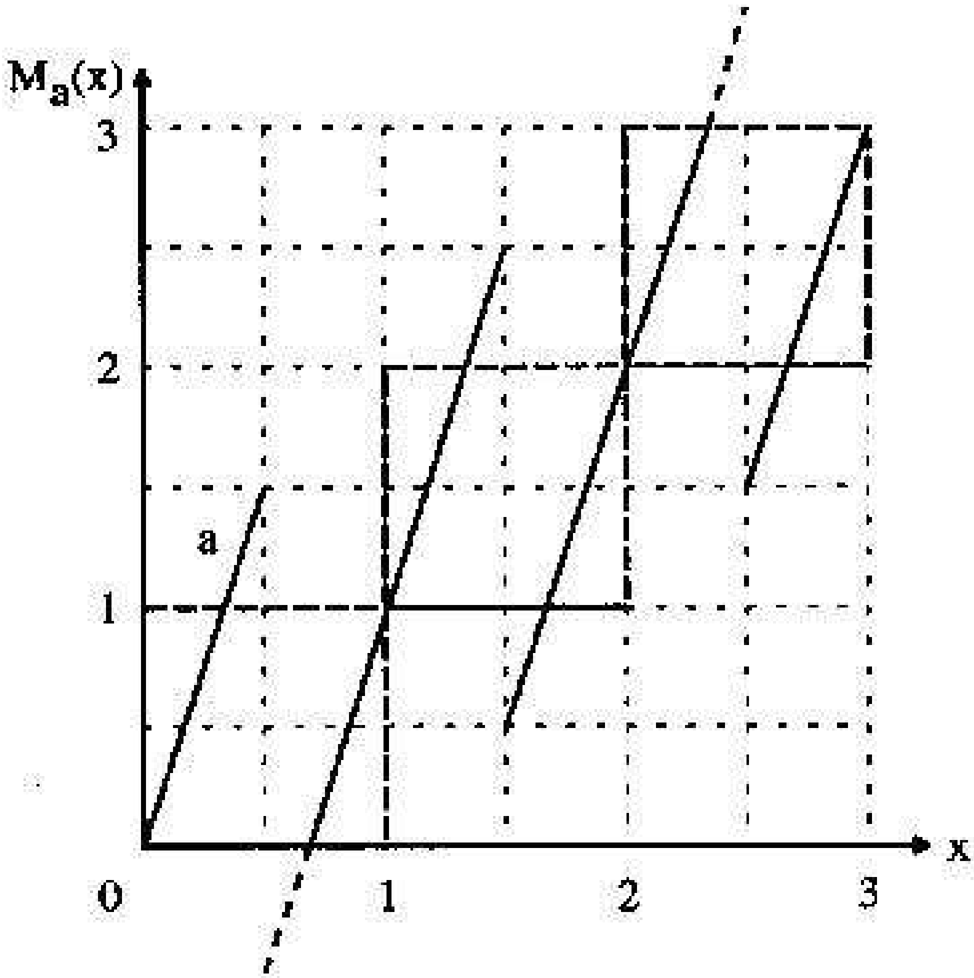

Figura 2: Trajetórias de pontos no mapa

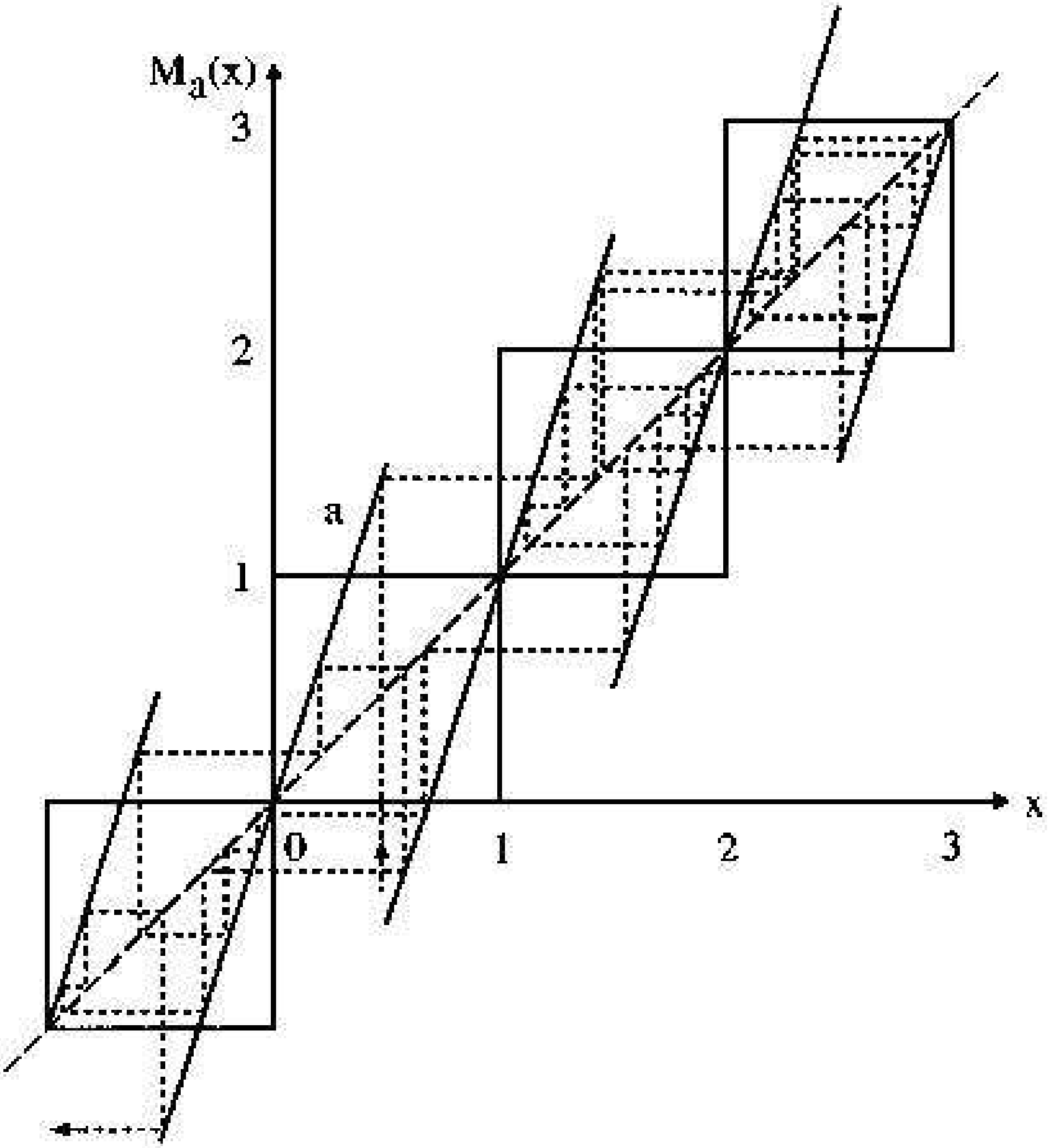

Figura 3: Partição de Markov em mapa com inclinação a=4

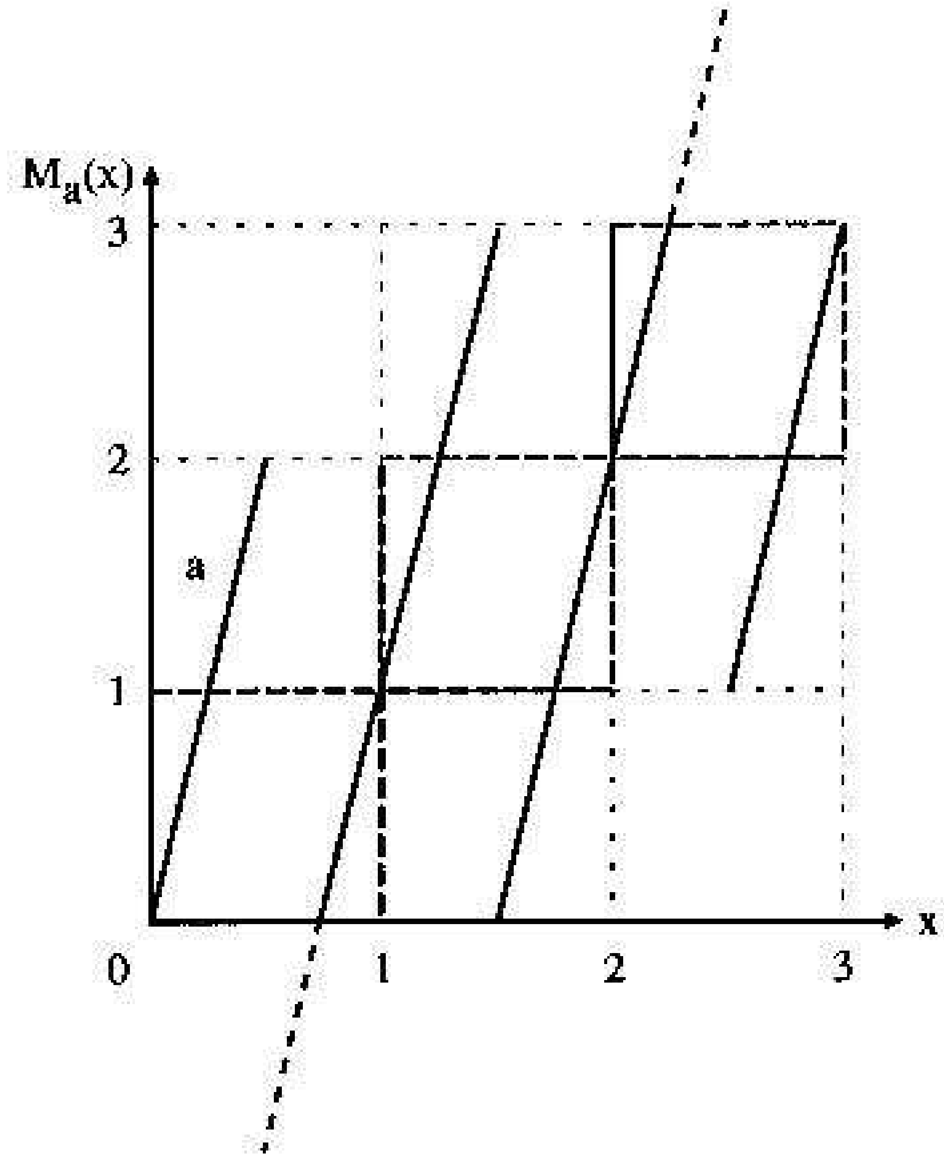

Figura 4: Coeficiente de difusão determinístico em função da inclinação